TABLE DES MATIÈRES

La vie et l'œuvre de Joseph Kampé de Fériet

Jean Delporte
8, Clos des Capucins
59280 – Bois Grenier

Joseph Kampé de Fériet (1893–1982).

Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Lille
du 1er novembre 1919 au 1er novembre 1964.
Directeur de l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille
de 1929 à 1945.

Introduction

Joseph Kampé de Fériet est décédé à Villeneuve d'Ascq (Nord) le 6 avril 1982. Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Lille, il y enseigna depuis le 1er novembre 1919 jusqu'à sa mise à la retraite le 1er novembre 1964.

Il demeura fidèle à cette Faculté jusqu'à ses derniers jours ; il assistait à la plupart de ses manifestations et, en particulier, participait régulièrement et activement aux séances du séminaire de Probabilités et Statistique animé par le Professeur Denis Bosq ; sa dernière participation eut lieu en juin 1981 lors d'une conférence donnée par M. Laurent Schwartz qui traita du mouvement brownien.

L'exposé des travaux scientifiques de Joseph Kampé de Fériet dans les pages qui suivent résulte d'exposés donnés en octobre 1982 et en octobre 1996 dans le cadre du séminaire de Probabilités et Statistique. Je remercie tout particulièrement M. Charles Suquet, responsable de la revue de l'U.F.R. de Mathématiques, de m'avoir proposé d'en donner une présentation plus développée dans le cadre de cette revue. Mes remerciements vont aussi à M. Gérard Gontier, ancien directeur de l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille pour ses conseils très précieux ainsi qu'aux diverses personnes de cet institut qui m'ont permis d'accéder au fonds Kampé de Fériet. Je dois aussi remercier tout spécialement ses deux fils, Benoît (Père Lambert Kampé de Fériet, bénédictin à l'abbaye d'En Calcat) et Marc pour les renseignements très précis et les documents qu'ils m'ont communiqués, les encouragements qu'ils m'ont prodigués et les photos de leur père jointes à ce travail.

En annexe, on trouvera jointes :

1. La liste récapitulative des 238 publications de Joseph Kampé de Fériet. Chacune d'elles est référencée dans le travail par son numéro d'ordre et, éventuellement, par son titre et la revue qui l'avait accueillie.

2. Un curriculum vitæ établi par ses soins le 1er janvier 1966.

3. L'allocution prononcée à ses funérailles le samedi 10 avril 1982 par M. le Professeur Michel Parreau, Président honoraire de l'Université.

4. L'éloge rendu au nom des mécaniciens de l'Institut de Mécanique des Fluides par M. Gérard Gontier ainsi que la notice rédigée par M. Lucien Malavard au nom de l'Académie des Sciences à laquelle Joseph Kampé de Fériet appartint en tant que membre correspondant pour la section des sciences mécaniques depuis son élection le 1er juin 1954.

Jean Delporte

1 De 1893 à 1919

Joseph Kampé de Fériet naquit à Paris le 14 mai 1893.

Reçu en juillet 1910 aux baccalauréats de mathématiques et de philosophie, il entra à la Sorbonne en octobre 1910 pour y préparer la licence de mathématiques.

Ses maîtres furent Elie Cartan, Paul Montel et René Garnier en Mathématiques Générales, Edouard Goursat et Henri Lebesgue en Calcul Différentiel et Intégral, Gabriel Lippmann en Physique Générale, Paul Appell en Mécanique Rationnelle et en Mécanique Céleste.

C'est ce dernier qui eut sur lui une influence décisive. La clarté exceptionnelle de ses enseignements contribua certainement à donner à son élève le goût de l'analyse mathématique et à l'orienter vers la mécanique. Elle lui communiqua aussi le goût d'un enseignement clair et de qualité dont il sut lui-même donner de nombreuses preuves par la suite.

Reçu premier avec la mention très bien au certificat de Mécanique Céleste en juin 1913, Joseph Kampé de Fériet se vit, dès la proclamation des résultats, proposer par Appell de préparer une thèse de doctorat sous sa direction. L'objet de ce travail analysé plus loin se situait dans le prolongement de travaux antérieurs d'Hermite en 1865, de son élève Didon en 1868, et d'Appell lui-même en 1913.

Trois Notes parues aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* en novembre et décembre 1913, janvier 1914, s'ensuivirent. Le résultat final de son travail fut trouvé en juillet 1914 et le manuscrit de thèse fut accepté par Appell et déposé pour impression chez Gauthier-Villars. Depuis le 1er janvier 1914, Joseph Kampé de Fériet était en outre entré à mi-temps comme astronome-stagiaire au service de l'heure de l'Observatoire de Paris.

La déclaration de guerre l'empêcha de soutenir immédiatement sa thèse de doctorat. Appelé le 14 août, il fut affecté à Argentan (Orne) au dépôt du 104e régiment d'infanterie.

Lors d'un congé de convalescence d'un mois, il put le 15 avril 1915, soutenir sa thèse sur « *les fonctions hypersphériques* » devant un jury présidé par Paul Appell, les examinateurs étant Elie Cartan et Claude Guichard. Elle lui valut la mention « Très Honorable » et l'inscription immédiate sur la liste d'aptitude à l'enseignement supérieur.

En juin 1916, sur décision d'Emile Borel, il fut affecté à la Commission d'artillerie navale de Gâvres (Morbihan) et il y séjourna jusqu'en septembre 1919. Ce séjour lui permit de se familiariser avec la Balistique, la Mécanique des Fluides et l'Aérodynamique alors naissante. Ses travaux portèrent sur le mouvement des projectiles, les perturbations de leurs trajectoires et la mesure des vitesses par enregistrement photographique. Avec Gabriel Foëx, maître de conférence de physique, il mit au point un dispositif de mesure des vitesses des projectiles sous tous les angles de tir et de prises de photographies posées des projectiles. Ces travaux en commun se poursuivirent au delà de la guerre et donnèrent lieu à des publications notamment en 1926 lors du second congrès de mécanique appliquée tenu à Zürich (cf. ses publications [14], [29] et [35]). Ces travaux et ceux qu'il réalisa plus tard avec ses collaborateurs à l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille lui permirent de devenir un excellent photographe.

La contribution apportée par Joseph Kampé de Fériet à la Commission de Gâvres lui valut en novembre 1917 et avril 1919 deux témoignages officiels de satisfaction des ministres de la marine de l'époque, Charles Chaumet et Georges Leygues témoignages joints en annexe du présent travail. Elle lui valut aussi de demeurer membre de cette Commission de 1920 à 1944 et eut sans doute aussi une influence sur sa nomination en 1929 comme directeur de l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille. Ses publications, [6], [8], [10], [12], [13] et [14] témoignent de son activité à Gâvres ; l'une d'elles intitulée *Sur le mouvement d'un projectile autour de son centre de gravité* parut en 1918 dans le cours de Balistique de l'Ingénieur d'Artillerie Navale Sugot. Sa publication [6], intitulée *Expression de la fonction $\xi_n(\tau)$ par une fonction hypergéométrique* se situait dans le droit fil des travaux entrepris lors de sa thèse et prolongés depuis lors par des recherches sur les fonctions hypersphériques et les fonctions hypergéométriques, recherches évoquées plus loin.

Joseph Kampé de Fériet quitta Gâvres en septembre 1919. Il reçut l'arrêté du Ministre de l'Instruction Publique le nommant maître de conférence à la Faculté des Sciences de Lille à compter du 1er novembre 1919. Toute sa carrière scientifique se déroulera à Lille où il épousera en 1923 Mademoiselle Germaine Carlier, fille du chirurgien Victor Carlier, Professeur de la Faculté de Médecine.

C'est cette activité d'enseignant, de Directeur de l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille et de chercheur qui va maintenant être décrite.

2 Période 1919–1929

2.1 Activités d'enseignement et de recherche

A compter du 1$^{\text{er}}$ novembre 1919 Joseph Kampé de Fériet fut d'abord chargé de l'enseignement du certificat de Mécanique Rationnelle à la Faculté des Sciences. Ce même enseignement lui fut aussi confié à compter du 1$^{\text{er}}$ octobre 1923 à l'Ecole d'Ingénieurs I.D.N. (Institut industriel du Nord devenu depuis Ecole Centrale de Lille). Quelques années plus tard, il assurera l'enseignement de Mathématiques Générales et celui du Certificat d'études supérieures d'Analyse Supérieure.

Ses collaborateurs et ses collègues ont toujours souligné le soin extrême qu'il apportait à la rédaction annuelle de ses cours. Leur contenu était renouvelé chaque fois pour répondre à l'attente de ses étudiants en leur apportant un enseignement clair et rigoureux. De plus, il n'hésitait jamais à y introduire des applications numériques qui lui paraissaient essentielles.

Dès son arrivée à la Faculté, son doyen, le futur recteur Albert Châtelet lui signala l'intérêt de l'emploi du calcul vectoriel dans l'enseignement de Mécanique Rationnelle. L'expérience qu'il tenta fut un succès et il constata que les étudiants s'assimilaient rapidement ces notations et qu'il en résultait une réelle simplification dans l'exposé du cours.

Le fruit de cet enseignement et des longues causeries qu'il eut à ce sujet avec son doyen fut un ouvrage autographié de 192 pages paru en 1921 *Le calcul vectoriel et ses applications à la Géométrie Analytique, à la théorie élémentaire des courbes et des surfaces, aux systèmes de vecteurs.* ([18]). Albert Châtelet et Joseph Kampé de Fériet destinaient cet ouvrage aux étudiants de Mathématiques Générales et de Mécanique Rationnelle.

Ultérieurement, en 1924, ils publièrent chez Gauthier-Villars un ouvrage de 425 pages, *Le calcul vectoriel, Théorie, applications à la Géométrie et à la Cinématique* [28]. Ce traité développait avec de très larges compléments l'exposé de 1921. Edité à l'intention des élèves de Faculté, de Mathématiques Spéciales et des écoles d'ingénieurs, il avait pour but essentiel de leur montrer que le calcul vectoriel, dont l'usage était pour ainsi dire inexistant, pouvait être pour eux un excellent outil de travail en Géométrie, en Mécanique et en Physique et il contribua beaucoup à le répandre. De plus, il contenait dans sa dernière partie une excellente introduction aux questions d'opérateurs invariants en Algèbre et en Analyse tensorielle, notions qui étaient alors totalement absentes des programmes d'enseignement en France. Joseph Kampé de Fériet les développera plus tard amplement dans ses cours de Mécanique des milieux continus.

Outre ces deux ouvrages, il publia de 1920 à 1929, 28 notes ou mémoires que l'on peut classer en deux groupes.

Le premier (publications [29], [32] et [35] déjà signalées) se situe dans la ligne des travaux expérimentaux entrepris à la Commission d'Artillerie navale de Gâvres. Ce sont des travaux réalisés avec Gabriel Foëx consacrés à l'enregistrement photographique sur plaque mobile du mouvement des projectiles et en particulier de leur vitesse. La méthode qu'ils imaginèrent permettait d'une part de mesurer la vitesse des projectiles sous tous les angles et d'autre part la prise de photographies posées des projectiles quelle que soit leur vitesse dans les conditions normales de tir en utilisant la seule lumière solaire. La réalisation du type définitif d'appareil utilisait pour l'entraînement uniforme et rapide de la plaque la pression d'un gaz. Elle nécessita l'étude de nombreux problèmes de mécanique pratique.

Le second groupe de travaux analysés plus loin se situe dans la prolongation de sa thèse de doctorat ; l'ensemble de ces travaux fut repris dans l'ouvrage de 434 pages qu'il publia chez Gauthier-Villars avec Paul Appell en 1926 ; intitulé *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, polynômes d'Hermite* [36], cet ouvrage est demeuré un classique. Il faut aussi mentionner ici l'opuscule de 86 pages *La fonction hypergéométrique de Gauss* [58] paru en 1937 au Mémorial des Sciences Mathématiques et le fascicule IX du formulaire de mathématiques consacré aux fonctions de la Physique mathématique qu'il rédigea en 1957 à la demande du CNRS, publié sous le titre *Fonctions hypergéométriques, hypergéométriques généralisées, polynômes d'Hermite* [150].

Dès 1925, il était considéré comme l'un des meilleurs spécialistes des fonctions de la Physique mathématique et ceci lui valut tout au long de sa carrière d'être régulièrement consulté par des chercheurs français ou étrangers.

Lors d'un semestre d'hiver en 1925–26, il assura un enseignement à l'Université des rois Jagellon à Cracovie ainsi que quelques leçons à l'Ecole Polytechnique de Varsovie et à l'Université de Prague. Le thème de son cours de Cracovie était consacré à la fonction hypergéométrique généralisée et il donna lieu à la publication d'un cours autographié de 80 pages, [34], analysé plus loin.

Ce fut là le début d'une carrière internationale qui le vit, parallèlement à ses enseignements assurés à Lille, participer à de nombreux colloques et congrès internationaux, aller pour exposer dans des universités étrangères le résultat de ses travaux. En particulier, son séjour en Pologne lui permit de nouer de fructueuses relations avec la très brillante école mathématique polonaise groupée autour de la revue « Fundamenta mathematicae » et dont les représentants les plus illustres furent Stefan Banach et Hugo Steinhaus. Il s'enthousiasma pour leurs travaux et tout spécialement pour l'Analyse Fonctionnelle bien avant qu'elle ne devienne populaire en France. C'est aussi à cette époque qu'il fit la connaissance d'un jeune probabiliste, Marc Kac, qu'il eut ensuite souvent l'occasion de rencontrer aux USA après guerre.

Sur la recommandation d'Henri Lebesgue dont il avait suivi les exercices de géométrie pour le certificat de Calcul Différentiel et Intégral en 1911–12, il fut chargé du cours de la Fondation Claude-Antoine Peccot au Collège de France en 1927–1928 qu'il intitula « *Sur quelques applications des fonctions modulaires à la théorie des fonctions analytiques.* »

Avant d'aborder la seconde étape de sa carrière, la direction de l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille qu'il assura de 1929 à 1945, il est nécessaire de présenter un inventaire détaillé de ses travaux de recherche pour la période 1913–1929 car ils constituent dans son œuvre un domaine quelque peu autonome par rapport au reste de ses travaux.

2.2 Fonctions hypersphériques, fonctions hypergéométriques

Ses trois premières publications aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* et sa thèse de doctorat traitaient des fonctions hypersphériques. Charles Hermite en 1865 et son élève Didon en 1868 avaient défini un système biorthogonal de polynômes qui généralisaient les polynômes de Legendre. C'est Paul Appell en 1912 qui fut le premier à relier les polynômes définis par Hermite à la théorie du potentiel dans l'espace à quatre dimensions en leur faisant jouer un rôle identique à celui joué par les polynômes de Legendre dans l'espace à trois dimensions. L'objet du travail de thèse qu'il confia à Joseph Kampé de Fériet était de synthétiser et d'approfondir la théorie des polynômes d'Hermite et de Didon en se servant des théorèmes généraux sur les fonctions harmoniques et de montrer que ces polynômes apportaient à la théorie du potentiel dans l'espace à n dimensions l'instrument analytique qui lui manquait pour devenir l'équivalent de ce qu'est celle du potentiel ordinaire grâce aux polynômes de Legendre.

F. Didon avait généralisé les résultats établis par Hermite pour deux variables en introduisant le système biorthogonal $U_{m_1,m_2,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n)$, $V_{m_1,m_2,\ldots,m_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ défini par :

$$\begin{aligned}
&(1-2a_1x_1-\cdots-2a_nx_n+a_1^2+\cdots+a_n^2)^{-n/2}= \\
&\qquad\qquad \sum a_1^{m_1}\cdots a_n^{m_n}V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n) \\
&\left[(a_1x_1+\cdots+a_nx_n-1)^2+(a_1^2+\cdots+a_n^2)(1-x_1^2-\cdots-x_n^2)\right]^{-1/2}= \\
&\qquad\qquad \sum a_1^{m_1}\cdots a_n^{m_n}U_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n)
\end{aligned}$$

et il avait montré qu'ils vérifiaient un système d'équations aux dérivées partielles linéaires.

Dans ses premières Notes, Joseph Kampé de Fériet étudia les polynômes hypersphériques (notés ultrasphériques dans sa première Note) $V^{(s)}_{m_1,\ldots m_n}$ définis par l'égalité :

$$\begin{aligned}
&\Big(1-(2a_1x_1+\cdots+2a_nx_n)+a_1^2+\cdots+a_n^2\Big)^{-(n+s-1)/2} \\
&\qquad\qquad \sum a_1^{m_1}\cdots a_n^{m_n}V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n)
\end{aligned}\tag{1}$$

Il signalait que ces polynômes sont reliés aux fonctions harmoniques car la fonction $F=\big((x_1-a_1)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2+x_{n+1}^2+\cdots+x_{n+s+1}^2\big)^{-(n+s-1)/2}$ est solution de l'équation de Laplace dans l'espace euclidien de dimension $n+s+1$ et la fonction introduite par (1) n'est autre que la valeur de F sur l'hypersphère unité de cet espace.

Par application de la formule de Green, Joseph Kampé de Fériet démontra d'abord que deux polynômes ultrasphériques de degrés différents vérifient une relation d'orthogonalité. Ceci lui permit d'en déduire une méthode de calcul des cœfficients de Fourier d'une fonction en série de polynômes $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ ou de leurs adjoints $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ ceux-ci ayant déjà été définis par Appell (*Comptes rendus de* *l'Académie des sciences*, 13 juin 1913) comme suit :

$$\begin{aligned}
& H_S(x_1,\ldots,x_n) \\
= \; & \left[(a_1x_1+\cdots+a_nx_n-1)^2+(a_1^2+\cdots+a_n^2)(1-x_1^2-\cdots-x_n^2)\right]^{-s/2} \\
= \; & \sum a_1^{m_1}\cdots a_n^{m_n} U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n)
\end{aligned}$$

Joseph Kampé de Fériet et Paul Appell avaient remarqué que H_S n'est autre que la valeur sur la sphère unité de l'espace à $n+s$ dimensions de

$$H=\left[(a_1x_1++\cdots+a_nx_n-1)^2+(a_1^2+\cdots+a_n^2)(x_{n+1}^2+\cdots+x_{n+s+1}^2)\right]^{-s/2}$$

Joseph Kampé de Fériet en déduisit l'expression détaillée de ces polynômes qu'il classa en polynômes zonaux, tesseraux ou sectoriaux selon que l'entier s vérifie $s=1$ ou $1<s<n+1$ ou $s=n+1$; il remarqua aussi que de plus si $s\geq 1$

$$V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots x_n)=V_{m_1,\ldots m_n,0,\ldots,0}(x_1,x_2\ldots x_n,\ldots x_{n+s-1})$$

La troisième Note qu'il publia avec Paul Appell étudiait la convergence des séries de polynômes $V_{m_1,m_2}(x,y)$.

Dans sa thèse, il résuma d'abord les propriétés générales des fonctions harmoniques dans l'espace à n dimensions ; généralisant une technique de calcul due à Jacobi, il donna une méthode simple basée sur le calcul des variations pour former l'équation de Laplace dans un système de coordonnées curvilignes quelconques à n variables et il étudia les polynômes harmoniques homogènes en donnant l'expression d'un tel polynôme de degré arbitraire.

Le second chapitre de sa thèse était consacré au développement de la première fonction génératrice d'Hermite et Didon en série de polynômes hypersphériques zonaux ; ceci lui permit d'exprimer le polynôme $V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n)$ par une fonction hypergéométrique à n variables d'Appell-Lauricella et de retrouver par cette voie qu'un de ces polynômes à n variables vérifie un système de n équations aux dérivées partielles déjà rencontré par F. Didon.

Joseph Kampé de Fériet rétablira ce résultat ultérieurement par un procédé direct (cf. [11], C.R.A.S., t. 167, 1918, p. 519) en insistant sur le lien entre ces équations aux dérivées partielles et l'équation de Laplace.

Le troisième chapitre était consacré à l'étude des polynômes zonaux $U_{m_1\ldots m_n}$ adjoints des polynômes $V_{m_1,\ldots m_n}$, déduits de la seconde fonction génératrice d'Hermite-Didon. On y trouve notamment leur expression par une formule qui est l'extension complète à n variables de la formule d'Olinde Rodrigues vérifiée par les polynômes de Legendre.

Le quatrième chapitre étudiait le développement d'une fonction de n variables en une série de polynômes zonaux de l'une ou l'autre famille ; il y était notamment établi que si la fonction était pourvue de dérivées de tous ordres, bornées dans leur ensemble, le développement était absolument et uniformément convergent dans le domaine $x_1^2+\cdots+x_n^2\leq 1$. Un des exemples étudiés montrait le lien entre ces polynômes et les fonctions de Bessel.

Enfin le dernier chapitre établissait que tous les polynômes harmoniques homogènes se déduisent simplement des polynômes zonaux d'où découlent leurs propriétés essentielles.

L'ensemble de ce travail complété par quelques publications ultérieures constituera la seconde partie du traité déjà cité que Paul Appell et Joseph Kampé de Fériet publièrent en 1926. Dans une lettre à Paul Appell du 8 novembre 1917 parue en 1921 au tome 43, pages 197–207 des Acta Mathematica sous l'intitulé *Sur les fonctions hypersphériques et sur l'expression de la fonction hypergéométrique par une dérivée généralisée* [17], Joseph Kampé de Fériet notait : « Mais au point de vue de l'analyse moderne, la question de la représentation d'une fonction arbitraire $F(x_1, x_2, \dots x_n)$ par une série de fonctions hypersphériques $U^{(s)}$ ou $V^{(s)}$ était loin d'être épuisée ... L'idée se présentait naturellement d'essayer de souder la question à la théorie générale des équations intégrales ... » C'est cette idée qu'il développa dans deux Notes aux *Comptes rendus* [7] et [9] parues en 1916 et 1917 et reprises aux pages 209–210 et 219–223 du traité d'Appell et Kampé de Fériet.

Dans la première, intitulée « *sur une équation intégrale de seconde espèce admettant les fonctions hypersphériques comme solutions fondamentales* » il étendait une méthode donnée par Hilbert pour les fonctions sphériques ordinaires au cas des fonctions hypersphériques.

Dans la seconde « *sur la formation d'équations intégrales admettant les fonctions hypersphériques comme solutions fondamentales,* » il étudiait le cas particulier des polynômes sphériques d'une variable $U_n^{(s)}(x)$ définis par :

$$(1 - 2ax + a^2)^{-s/2} = \sum_0^\infty a^n U_n^{(s)}(x)$$

Partant du développement :

$$F(x) = \sum_0^\infty A_n U_n^{(s)}(x)$$

supposé uniformément convergent sur $[-1, +1]$, il établissait que la fonction

$$K(x, y) = \int_0^\pi F(xy + \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)} \cos\omega) \sin^{s-1}\omega \,\mathrm{d}\omega$$

admet sur $[-1, +1] \times [-1, +1]$ le développement

$$K(x, y) = 2^{s-1}\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right) \sum_0^\infty A_n \frac{\Gamma(n + 1)}{\Gamma(n + s)} U_n^{(s)}(x) U_n^{(s)}(y)$$

et en donnait quelques applications.

Dans une Note ultérieure de 1921 parue aux *Comptes rendus* sous le titre *Sur les fonctions hypercylindriques* [19], reproduite p. 412–413 du traité d'Appell et Kampé de Fériet, faisant référence à un travail antérieur d'Humbert, il formait l'équation de Laplace dans un système de coordonnées curvilignes de l'espace à $n+3$ dimensions dont une famille de surfaces coordonnées est fournie par des hypercylindres de révolution autour d'un même axe et en recherchait des solutions de la forme $\exp(\lambda t) P(x_1, x_2 \ldots x_n) f(r) \cos k\varphi$ (resp. $\ldots \sin k\varphi$) (λ constante arbitraire, k entier positif) ; il obtenait pour chaque valeur de k des solutions produit d'un polynôme hypersphérique en $x_1, x_2, \ldots x_n$ et d'une fonction de Bessel en r.

Ces travaux consacrés aux polynômes hypersphériques étaient liés à la généralisation due à Lauricella des fonctions hypergéométriques d'Appell à deux variables (cf. Appell et Kampé de Fériet pp. 242–243 et 268–269). Très rapidement, Joseph Kampé de Fériet fut donc conduit à des travaux qui porteront sur la fonction hypergéométrique de Gauss $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, sur les fonctions hypergéométriques généralisées au sens de Goursat $F_{pq}(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q, x)$ et sur les fonctions hypergéométriques à plusieurs variables.

S'agissant de la fonction hypergéométrique de Gauss, dans le cadre des travaux qu'il effectua à la Commission de Gâvres, il adressa en 1916 une Note à la Commission de Balistique de l'Académie des Sciences, Note déjà citée : « *Expression de la fonction $\xi_n(\tau)$ par une fonction hypergéométrique* » qu'il résumait ainsi :

« Dans son rapport sur les travaux examinés et retenus par la Commission de Balistique pendant la durée de la guerre (*Comptes rendus*, t. 170, 1920, p. 436). J. Hadamard a classé ce court travail parmi ceux (au nombre de 7 seulement) dont il a proposé l'impression à l'Académie.

« La fonction $\xi_n(\tau)$ s'introduit dans les équations du mouvement du centre de gravité d'un projectile quand on suppose la résistance de l'air proportionnelle de la n-ième puissance de la vitesse (n entier ou non). Je montre que cette fonction s'exprime très simplement au moyen de la fonction hypergéométrique de Gauss ; ceci permet de retrouver ses propriétés connues et d'en déduire d'autres, notamment de donner des développements en série plus rapidement convergents que ceux qu'on utilisait et de classer les cas où elle se réduit à des fonctions élémentaires. »

Dans sa lettre à Paul Appell déjà citée, parue aux Acta Mathematica en 1921, il rappelait la définition de la dérivée généralisée de Riemann-Liouville et en déduisait deux expressions de la fonction hypergéométrique de Gauss sous la forme de dérivées généralisées d'une fonction binôme ; l'une d'elles généralisait la formule donnée par Jacobi pour $F(-n, \alpha+n, \gamma, x)$. Il signalait que plusieurs propriétés connues de la fonction hypergéométrique de Gauss (équations aux différences finies, équation différentielle de Gauss, développements en séries de fonctions hypergéométriques de Niels Nielsen, de Puiseux et de Schlömilch) s'en déduisaient simplement.

C'est ce même sujet qu'il reprendra de manière plus générale dans deux Notes aux *Comptes rendus* des 8 mars et 3 mai 1920 (publications [15] et [16]) ; il y indiquera aussi que ses résultats peuvent s'étendre aux dérivées partielles généralisées définies par Montel et en fera l'application aux fonctions hypergéométriques à deux variables d'Appell.

Les treize premières pages du traité d'Appell et Kampé de Fériet sont consacrées à un rappel succinct des propriétés essentielles de la fonction hypergéométrique de Gauss ; on y trouve notamment l'étude de la convergence de la série hypergéométrique, de son prolongement analytique, les propriétés de contiguïté et les formules intégrales de Pincherlé–Mellin et de Barnes. Cette étude sera reprise de manière très complète et très développée dans le mémoire de 86 pages déjà cité que Joseph Kampé de Fériet fera paraître en 1935 dans le fascicule 85 du mémorial des sciences mathématiques sous le titre :

La fonction hypergéométrique de Gauss

En fait, la rédaction de ce mémoire remontait à 1927 car Joseph Kampé de Fériet notait dans l'index bibliographique, page 71. « Cette bibliographie ne contient que les travaux parvenus à notre connaissance avant le 1er janvier 1928, date à laquelle j'ai terminé mon manuscrit.

D'autres obligations ne m'ayant pas permis de continuer à me tenir au courant des publications dans ce domaine, seule la très amicale insistance de M. Villat a pu obtenir que je livre à la presse ces feuilles dans l'état où elles se trouvaient depuis que je les avais abandonnées pour d'autres recherches. »

En dépit de ces réserves, ce travail constituait une somme et faisait le point des résultats connus à l'époque sur la fonction hypergéométrique. On y trouve notamment l'étude détaillée de l'uniformisation de $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ par la fonction modulaire $x = (\varphi(\tau))^8$, des fonctions P de Riemann et S de Schwarz, des problèmes de représentation conforme liés à la fonction hypergéométrique.

Le retentissement que connut ce travail fut durable. Il valut à Joseph Kampé de Fériet d'être sollicité en 1957 pour contribuer au fascicule « Fonctions de la Physique Mathématique » [150] publié par le CNRS.

Outre l'introduction, il y condensa en 10 pages l'essentiel des résultats sur la fonction hypergéométrique de Gauss et rédigea aussi deux notices, l'une consacrée aux fonctions hypergéométriques généralisées, l'autre aux polynômes d'Hermite à une variable. Ces polynômes ont retenu maintes fois l'attention de Joseph Kampé de Fériet comme on le verra notamment pour les travaux qu'il consacra à l'équation de la chaleur et à ses solutions aléatoires.

On peut toutefois déjà signaler un petit mémoire qu'il fit paraître en 1923.

Sur une formule d'addition des polynômes d'Hermite [25]

Cette formule qui s'écrit :

$$H_\mu\left(\frac{a_1x_1 + \ldots + a_nx_n}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}\right) = (a_1^2 + \ldots + a_n^2)^{-\mu/2}$$
$$\sum_{m_1+\cdots+m_n=\mu} \frac{\mu!}{m_1!m_2!\cdots m_n!} a_1^{m_1} \cdots a_n^{m_n} H_{m_1}(x_1) \ldots H_{m_n}(x_n)$$

découle très simplement de la fonction génératrice des polynômes d'Hermite. Joseph Kampé de Fériet en déduisait de nombreuses applications. Il établissait aussi la formule suivante qui relie très simplement les polynômes hypersphériques à n variables aux produits de polynômes d'Hermite

$$2^{(n+s-3)/2}\Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right)V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n)$$
$$= \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\frac{t^{\mu+n+s-2}}{m_1!,\ldots,m_n!}H_{m_1}(tx_1)\ldots H_{m_n}(tx_n)\,\mathrm{d}t$$

formule déjà établie par Niels Nielsen dans le cas d'une variable. Ces résultats sont repris dans la troisième partie du traité d'Appell et Kampé de Fériet, p. 342–346, consacrée aux polynômes d'Hermite.

Le second chapitre de cette troisième partie était intitulé

Les polynômes d'Hermite à plusieurs variables dérivés d'une exponentielle.

Deux systèmes de polynômes biorthogonaux déjà étudiés par Hermite en 1864 y étaient introduits.

Dans le cas de deux variables, les polynômes $H_{m,n}(x,y)$ et $G_{m,n}(x,y)$ sont donnés (cf. p. 376) par des intégrales doubles dues à Joseph Kampé de Fériet ; ces intégrales transposent un résultat établi pour une variable par A. Angelescu et N. Nielsen sous la forme

$$H_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+iu)^n\exp\big(-\frac{u^2}{2}\big)\,\mathrm{d}u$$

Les propriétés de ces polynômes d'Hermite généralisés seront utilisées par Joseph Kampé de Fériet en 1966 et 1971 dans deux publications [186] et [211] consacrées aux développements de Gram-Charlier pour certaines densités de probabilité.

Le fascicule du CNRS publié en 1957, contenait aussi un document de 9 pages traitant des fonctions hypergéométriques généralisées. Il y rappelait que la fonction hypergéométrique généralisée d'une variable notée
$F\begin{pmatrix}\alpha_1,\alpha_2\cdots\ \alpha_p & \\ & ,x\\ \beta_1,\beta_2\ \cdots\ \beta_q & \end{pmatrix}$ ou $F_{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p|\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_q|x)$ est le prolongement analytique de la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\alpha_1,n)(\alpha_2,n)\cdots(\alpha_p,n)}{(\beta_1,n)(\beta_2,n)\cdots(\beta_q,n)}\frac{x^n}{(1,n)}\quad \text{où}\quad (\alpha,n)=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}\ \text{symbole d'Appell,}$$

aucun des β n'étant un entier négatif ; l'entier q est dit ordre de F et l'entier $\theta = q+1-p$, supposé non négatif, est la classe de F qui est dite complète si $\theta = 0$. Il rappelait aussi que le cas où θ est strictement positif se ramène au cas de $\theta = 0$ par confluence car $F(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{q+1-\theta},\beta_1,\ldots,\beta_q,x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}F(\alpha_1,\ldots,\alpha_{q+1-\theta},\frac{1}{\varepsilon},\ldots,\frac{1}{\varepsilon},\beta_1,\ldots,\beta_q,\varepsilon^q x)$ ce qui permet de déduire les propriétés d'une fonction hypergéométrique incomplète de celles d'une fonction complète.

Ces fonctions sont dénommées « fonctions hypergéométriques de Goursat » (voir par exemple G. Belardinelli « Fonctions hypergéométriques de plusieurs variables et résolution analytique des équations algébriques générales », Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 145, Paris, 1960, p. 9–11).

Joseph Kampé de Fériet mentionnait qu'outre la fonction hypergéométrique de Gauss, cette généralisation inclut d'autres fonctions usuelles (l'exponentielle, les fonctions de Kummer, de Bessel et de Clausen).

Dans le fascicule du CNRS, Joseph Kampé de Fériet après avoir rappelé les propriétés de la fonction hypergéométrique, donnait en tant que cas particuliers une étude de la fonction de Kummer $\Phi(\alpha,\gamma,x)=\sum_0^\infty \frac{(\alpha,n)}{(\gamma,n)}\frac{x^n}{(1,n)}$ et de la fonction hypergéométrique confluente de Whittaker

$$M_{k,m}(x)=x^{m+1/2}\exp\bigl(-\frac{x}{2}\bigr)\Phi(m-k+\frac{1}{2},2m+1,x)$$

La première contribution de Joseph Kampé de Fériet à la théorie des fonctions hypergéométriques généralisées fut une Note aux *Comptes rendus* en juin 1924 (publication [27]).

Il y étudiait le cas particulier des fonctions $K_p(\alpha,x)=\sum_0^\infty \frac{x^n}{(n+\alpha)^p}$ où l'entier p était non négatif et α non entier négatif et il remarquait que le prolongement analytique de cette fonction s'exprime lorsque $\operatorname{Re}\alpha>0$ et $p\geq 1$ par l'intégrale de Lerch

$$K_p(\alpha,x)=\frac{1}{(p-1)!}\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}\exp(-\alpha t)}{1-x\exp(-t)}\,\mathrm{d}t$$

uniforme dans tout le plan complexe privé de la coupure $[1,+\infty[$, le point $x=1$ étant un point singulier logarithmique.

Cette Note donnait une méthode de récurrence pour former l'équation différentielle linéaire d'ordre $p+1$ vérifiée par cette fonction ainsi que l'équation fonctionnelle qu'elle vérifie ; il y était aussi signalé que ceci permettait d'étudier les séries entières $F(x)=\sum_0^\infty a_n x^n$ lorsque $a_n=\sum_{p,q}\frac{A_{p,q}}{(\alpha_q+n)^p}$. Joseph Kampé de Fériet abandonnera néanmoins cette voie dans les deux publications suivantes qu'il consacra à ce thème.

Le première résultait d'un exposé donné à Paris en 1925 au Congrès des Sociétés Savantes *Sur une propriété générale des fonctions hypergéométriques d'une variable.* [30] Il y proposait une généralisation de la fonction de Goursat sous la forme

$$F^{p,q}_{r,s}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r\,|\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s|\,x)=\sum_0^\infty\frac{(\alpha_1,m)\cdots(\alpha_r,m)}{(\beta_1,m)\cdots(\beta_s,m)}\frac{x^n}{(1,m)}$$

où $m=pn+q\ \ n=0,1,\ldots$.

Il notait que chaque fonction de Goursat s'écrit pour chaque entier positif arbitraire p :

$$F_{r,s}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r\,|\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s|\,x)=\sum_{q=0}^{p-1}xF^{p,q}_{r,s}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r\,|\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s|\,x^p)$$

et qu'une formule réciproque se présente sous la forme

$$pF_{r,s}^{p;q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_r\,|\beta_1,\ldots,\beta_s|\,x)=\sum_{k=1}^{p}\xi_k^{-q}F_{r,s}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r\,|\beta_1,\ldots,\beta_s|\,\xi_k)$$

où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ désignent les racines de l'équation $\xi^p = x$; de plus une seconde formule réciproque était donnée ce qui permettait d'obtenir deux formules de transformation des fonctions hypergéométriques généralisées et d'établir un nouveau système d'intégrales de l'équation différentielle qu'elles vérifient. Ces fonctions $F_{r,s}^{p;q}$ ont été ensuite étendues au cas de deux variables par divers auteurs dont H.M. Srivanasta.

Joseph Kampé de Fériet donna aussi en 1925 à Grenoble un autre exposé consacré à la fonction hypergéométrique généralisée de Goursat *Sur les fonctions définies par des séries dont les cœfficients sont des fonctions rationnelles de l'indice* [31]. Les principales propriétés de ces fonctions sont passées en revue dans le premier paragraphe du chapitre IX du traité d'Appell et Kampé de Fériet : on y trouve notamment mentionnés la formation de l'équation différentielle qu'elles vérifient et leur prolongement analytique défini par une généralisation des intégrales d'Euler et de Barnes.

Une étude exhaustive de la fonction hypergéométrique généralisée fut exposée par Joseph Kampé de Fériet dans le cours semestriel qu'il donna à l'Université de Cracovie durant l'hiver 1925–1926.

Intitulé *Les fonctions hypergéométriques d'une variable* [34], ce cours fut publié en 1926 à Cracovie sous forme d'un volume autographié de 80 pages réparti en cinq chapitres. Le premier était consacré à la série hypergéométrique généralisée et à son prolongement analytique réalisé, lorsque la fonction est complète par une généralisation à q variables de l'intégrale d'Euler-Jacobi (cf. le formulaire du CNRS, fascicule II, p. 23) ; on y trouvait aussi une expression intégrale d'une fonction d'ordre et de classe donnés au moyen d'une fonction de même classe et d'ordre inférieur. Le second chapitre était consacré aux équations aux différences finies et à l'équation différentielle linéaire vérifiées par la fonction hypergéométrique généralisée, l'intégration, de cette équation différentielle étant traitée de manière exhaustive au chapitre 3.

Le chapitre 4 était consacré à la représentation des fonctions hypergéométriques généralisées par des intégrales de Pincherlé–Mellin et de Barnes et le dernier chapitre à l'intégration de l'équation différentielle des périodes d'une fonction elliptique considérée comme fonction du module.

Dans le fascicule du CNRS publié en 1957, Joseph Kampé de Fériet consacra son dernier paragraphe aux fonctions hypergéométriques de plusieurs variables à la théorie desquelles, à la suite de Paul Appell, il apporta une contribution essentielle.

Dès 1880, Appell avait défini quatre fonctions hypergéométriques de deux variables par les séries doubles suivantes :

$$\begin{aligned}
F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,x,y) &= \sum \frac{(\alpha,m+n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m+n)(1,m)(1,n)} x^m y^n \\
F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma',x,y) &= \sum \frac{(\alpha,m+n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m)(\gamma',n)(1,m)(1,n)} x^m y^n \\
F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma,x,y) &= \sum \frac{(\alpha,m)(\alpha',n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m+n)(1,m)(1,n)} x^m y^n \\
F_4(\alpha,\beta,\gamma,\gamma',x,y) &= \sum \frac{(\alpha,m+n)(\beta,m+n)}{(\gamma,m)(\gamma',n)(1,m)(1,n)} x^m y^n
\end{aligned}$$

et avait donné une étude détaillée de leurs propriétés dans un article paru en 1882 dans le tome VIII, p. 173–216 du Journal de Mathématiques

Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables.

Cette étude fut reprise dans la première partie du traité d'Appell et Kampé de Fériet en y adjoignant les résultats de divers auteurs dont ceux de Picard, de Goursat et de Joseph Kampé de Fériet. Dans cet ouvrage, ce dernier (cf. Chap. II, p. 39–43) donnait une généralisation à deux variables de la formule de Barnes permettant de donner une expression en termes d'intégrales complexes de chacune des fonctions d'Appell. De même, au chapitre III, il donnait l'intégrale générale des deux équations aux dérivées partielles vérifiées par la fonction F_4 lorsque $\gamma = \gamma' = 1$, l'expression des équations adjointes des équations aux dérivées partielles vérifiées par les quatre fonctions d'Appell et il déterminait le cas où elles sont identiques à leurs adjointes ainsi que les relations entre les fonctions F_1 et F_3.

Sa contribution essentielle est reproduite au chapitre IX consacré aux « fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur à deux variables » où il reprenait les résultats qu'il avait obtenus dans plusieurs Notes aux *Comptes rendus* où il avait défini ces fonctions par la série double

$$F(x,y) = \sum_{m,n} a_{m,n} x^m y^n$$

où les $a_{m,n}$ vérifient les conditions suivantes :

$$a_{m+1,n} : a_{m,n} = P(m,n) : R(m,n)\ ; a_{m,n+1} : a_{m,n} = Q(m,n) : S(m,n)\,,$$

P, Q, R, S désignant des polynômes tels que les degrés de P et Q soient au plus égaux à ceux de R et S lesquels ne s'annulent pour aucun des entiers m et n.

Hj. Mellin dans une Note aux *Comptes rendus* en 1921 (t. 172, p. 658) avait donné un système de deux équations aux dérivées partielles vérifiées par F lorsque les polynômes P, Q, R, S étaient décomposables en facteurs de la forme $am + bn + c$. Joseph Kampé de Fériet étendit ce résultat la même année dans deux Notes aux *Comptes rendus* (publications [20] et [21]) reproduites dans le traité d'Appell et Kampé de Fériet p. 144–149. Il prouvait que la donnée de P, Q, R, S permettait de former très simplement un système d'équations aux dérivées partielles vérifiées par F et il étendait ensuite ce résultat au cas plus général où les cœfficients $a_{m,n}$ vérifient deux équations aux différences finies linéaires compatibles mais d'ordre quelconque.

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{p}\sum_{s=0}^{q} P_{r,s}(m,n)a_{m+r,n+s} &= 0 \text{ et} \\ \sum_{r=0}^{p'}\sum_{s=0}^{q'} Q_{r,s}(m,n)a_{m+r,n+s} &= 0 \end{aligned}$$

$P_{r,s}$ et $Q_{r,s}$ désignant $(p+1)(q+1)$ et $(p'+1)(q'+1)$ polynômes de degrés respectivement au plus égaux à ceux de $P_{p,q}$ et $Q_{p',q'}$, ces derniers ne s'annulant pour aucun des entiers positifs m et n.

Joseph Kampé de Fériet étudia plus particulièrement le cas où les polynômes P, Q, R, S sont décomposables d'où la généralisation suivante des quatre fonctions d'Appell.

$$F(x,y) = \sum_{m,n} \frac{\prod_{i=1}^{\mu}(\alpha_i, m+n)\prod_{i=1}^{\nu}(\beta_i, m)(\beta_i', n)}{\prod_{i=1}^{\rho}(\gamma_i, m+n)\prod_{i=1}^{\sigma}(\delta_i, m)(\delta_i', n)} \frac{x^m y^n}{(1,m)(1,n)}$$

qu'il appela désormais *Fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur à deux variables,* connues depuis sous le nom de séries hypergéométriques d'ordre supérieur de Kampé de Fériet (cf. G. Belardinelli, op.cit., p. 26 et suivantes).

Joseph Kampé de Fériet les considérait comme une généralisation à deux variables des fonctions hypergéométriques de Goursat.

Dans quatre Notes aux *Comptes rendus* (publications [22], [23], [24], et [26]) parues en 1921, il étudie les propriétés générales de ces fonctions qu'il note désormais

$$F\left(\begin{array}{c|llll|c} \mu & \alpha_1 & ,\ldots, & \alpha_\mu & \\ \nu & \beta_1\beta_1' & ,\ldots, & \beta_\nu, \beta_\nu' & x,y \\ \rho & \gamma_1 & ,\ldots, & \gamma_\rho & \\ \sigma & \delta_1, \delta_1' & ,\ldots, & \delta_\sigma, \delta_\sigma' & \end{array}\right)$$ les entiers μ, ν, ρ et σ étant dits

indices caractéristiques de F et vérifiant $\mu+\nu \leq \rho+\sigma+1$, aucune des constantes γ_i, δ_i et δ_i' ne pouvant être égale à un entier négatif. Par analogie avec le cas d'une variable, il définissait l'ordre ω et la classe θ de F par $\omega = \rho+\sigma$ et $\theta = (\omega+1)-(\mu+\nu)$, les fonctions de classe nulle étant dites complètes ; lorsque θ est strictement positif, il établissait qu'il était possible de trouver $\theta+1$ fonctions complètes de même ordre ω dont F se déduit par confluence.

Chaque fonction hypergéométrique d'ordre supérieur de Kampé de Fériet vérifie deux équations aux dérivées partielles d'ordre $\omega+1$ et si $\theta = 0$ elle peut s'écrire sous forme d'une intégrale multiple qui généralise celle de Gauss. En outre, F est décomposable en une série de fonctions hypergéométriques généralisées de Goursat sous la forme

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\prod_{i=1}^{\mu}(\alpha_i, m) \prod_{i=1}^{\nu}(\beta_i, m)}{\prod_{i=1}^{\rho}(\gamma_i, m) \prod_{i=1}^{\sigma}(\delta_i, m)} F \begin{pmatrix} \alpha_1 + m, \ldots, \alpha_\mu + m, \beta'_1 \ldots \beta'_\nu \\ & , y \\ \gamma_1 + m, \ldots, \gamma_\rho + m, \; \delta'_1 \ldots \delta'_\sigma \end{pmatrix} \frac{x^m}{(1, m)}$$

Après avoir étudié l'intégration des équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur (cf. ses publications [24] et [26]), Joseph Kampé de Fériet étudia l'uniformisation de ces fonctions.

L'uniformisation de la fonction hypergéométrique de Gauss par une fonction modulaire convenablement choisie fut explicitement énoncée par Poincaré mais c'est W. Wirtinger qui fournit la fonction uniformisée sous forme d'une intégrale définie très propre à mettre en relief ses propriétés. (cf. J. Kampé de Fériet *La fonction hypergéométrique de Gauss* p. 24–30).

Dans une Note aux *Comptes rendus* du 11 janvier 1926 (*sur l'uniformisation d'une classe de fonctions définies par des séries entières à cœfficients méromorphes* [33]), Joseph Kampé de Fériet donna un procédé général d'uniformisation par la fonction modulaire $(\varphi(\tau))^8$ valable pour toutes les séries entières de la forme $\sum_0^\infty f(n) z^n$ où f est le produit d'une fraction rationnelle $R(z)$ par une fonction entière $g(z)$ dont le module croît moins que $\exp(\varepsilon\,|z|)$ quelque petit que soit $\varepsilon > 0$ donc en particulier chaque fois que les séries sont à cœfficients rationnels.

Lors du Congrès international des mathématiciens qui se tint à Bologne du 3 au 10 septembre 1928, il présenta une communication sur

L'uniformisation des fonctions hypergéométriques de deux variables. [39]

Il y prouvait que la fonction d'Appell $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$ devient une fonction uniforme de ξ et η dans le domaine $2\mathrm{Re}\,\xi + |\eta|^2 < 0$ en prenant pour x et y les fonctions modulaires de ξ et η définies par E. Picard (Acta Mathematica, t. II, 1883, p. 114). Il donna un exposé détaillé de ce résultat dans le mémoire qu'il publia en 1929 au Journal de mathématiques pures et appliquées :

Sur l'uniformisation des fonctions hypergéométriques de M. Appell par les fonctions modulaires de M. Picard. [43]

Ce mémoire et celui qu'il publia en 1929 aux Annales de la Société Scientifique de Bruxelles.

Les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables et la représentation conforme d'un demi-plan sur un polygone rectiligne [42]

constituent mis à part le fascicule du CNRS publié en 1957, les derniers travaux qu'il consacra aux fonctions hypergéométriques.

Néanmoins, il continuera pendant longtemps à en être considéré comme l'un des spécialistes et il recevait régulièrement des travaux qui y étaient consacrés.

Ainsi H.M. Srivanasta, après le décès de Joseph Kampé de Fériet, lui dédia un de ses travaux consacrés à certains types spéciaux de fonctions de Kampé de Fériet.

Les publications de 1929 constituent pour lui un tournant car il accède à cette date à la direction de l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille ce qui va modifier l'orientation de ses recherches.

3 Période 1929–1945

3.1 Création de l'Institut de Mécanique des Fluides

Un événement d'importance nationale va décider de l'orientation de Joseph Kampé de Fériet vers la Mécanique des Fluides pour de longues années.

En 1928, un accident d'avion où périt le sous-secrétaire d'Etat Bokanowski avait suscité une telle émotion dans le public qu'il fut décidé de créer un Ministère de l'Air. Son titulaire fut Laurent Eynac. Il choisit comme directeur général le polytechnicien Albert Caquot qui s'était illustré par ses travaux en Mécanique des Fluides et dont la personnalité ne pouvait que provoquer un vif essor de toutes les disciplines liées à l'Aéronautique.

A. Caquot eut l'idée féconde d'associer l'Université au nouveau Ministère de l'Air pour promouvoir et développer la recherche en Aéronautique.

C'est ainsi que l'on décida de fonder quatre instituts de Mécanique des Fluides à Paris, à Toulouse, à Marseille et à Lille. Le centre de Lille prit naissance à l'initiative du Doyen de la Faculté des Sciences, Albert Maige, et sur la demande d'Albert Caquot au Recteur Châtelet.

Dès le 1^er^ novembre 1929, Joseph Kampé de Fériet que ses travaux antérieurs désignaient (dont deux Notes de mécanique des fluides aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* en 1929) fut nommé directeur de l'institut lillois sur proposition du professeur Henri Villat, membre de l'Institut de France et directeur de l'Institut de Mécanique des Fluides de Paris. La création de l'institut lillois fut officialisée par décret du 26 mars 1930 mais l'Institut ne disposa pendant quatre ans que de modestes locaux prêtés par l'Institut Physique qui permirent néanmoins à la petite équipe initiale de préparer l'avenir.

Aussitôt nommé, Joseph Kampé de Fériet s'assura la collaboration de deux industries-clé bien implantées au nord de Paris : celle de la société Henri Potez à Méaulte pour l'Aéronautique et celle des établissements Neu à Lille pour la ventilation et le conditionnement d'air. Messieurs Potez et Neu entrèrent au Conseil d'Administration de l'institut lillois et appuyèrent toutes les démarches de son directeur. Cette idée d'un rapprochement de l'Université avec le secteur économique, maintenant largement répandue était à l'époque une innovation.

La pose par Albert Caquot de la première pierre du bâtiment qui deviendra l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille (I.M.F.L.) eut lieu le 23 juin 1932. Son inauguration officielle par le Général Denain, Ministre de l'Air, eut lieu le samedi 7 avril 1934 lors des journées scientifiques et techniques de Mécanique des Fluides. Celles-ci eurent lieu dans les nouveaux locaux de l'institut les 5, 6, 7 et 8 avril à l'occasion d'un congrès organisé par la section de Lille–Roubaix–Tourcoing des Ingénieurs Civils de France, congrès qui eut un grand retentissement. Joseph Kampé de Fériet soutenu par la foi très profonde qui l'a toujours animé, fit preuve à ce moment d'un grand courage car son épouse était alors gravement malade et décédait quelques jours plus tard lui laissant la charge d'élever leurs trois jeunes garçons Benoît, Marc et Michel.

Pendant plus de quinze années, de 1929 à 1945, Joseph Kampé de Fériet va désormais consacrer la quasi totalité de ses travaux à l'Aérodynamique et à l'Hydrodynamique, publiant une quarantaine d'articles sur ces sujets, abstraction faite de celui déjà cité de 1937 sur la fonction hypergéométrique de Gauss.

Nommé professeur titulaire de Mécanique des Fluides le 1er janvier 1930, il s'entoura d'une brillante équipe de techniciens, d'ingénieurs et d'universitaires dont celui qui sera son adjoint puis son successeur à la direction de l'Institut en 1945, André Martinot-Lagarde : agrégé de sciences plysiques, il était alors l'un des rares spécialistes français de l'Aéronautique. Revenant sur leur collaboration, Joseph Kampé de Fériet notait en 1971 :
« Dès la fondation de l'Institut, j'eus la chance merveilleuse d'avoir comme collaborateur celui qui devait devenir mon successeur en juin 1945 ; André Martinot-Lagarde apportait précisèment ce qui manquait : une solide formation de physicien. C'est par la collaboration d'un mathématicien de 36 ans, ayant quelque goût pour le bricolage expérimental, et d'un physicien de 26 ans, possédant de brillantes connaissances mathématiques, que démarra l'Institut de Mécanique des Fluides. L'imagination créatrice jointe au souci de rigueur ont fait pour moi d'André Martinot-Lagarde, pendant 16 ans, le plus précieux des collaborateurs. »

Le successeur de ce dernier à la direction de l'Institut, Monsieur Gérard Gontier, notait ce qui suit, peu après le décès de Joseph Kampé de Fériet (voir l'intégralité de son texte en annexe).

« Son premier travail d'enseignant a été de rédiger en termes clairs et précis un cours de Mécanique des Fluides à l'intention de ses élèves ; on y trouve un exposé sur les fonctions analytiques, la représentation conforme, la notion de tenseur, la théorie des tourbillons, les théorèmes d'énergie le tout illustré de nombreux exemples et applications.

Dès le début de cet enseignement (qui s'adressait à la fois à des étudiants de faculté et à certains élèves-ingénieurs de l'Institut industriel du Nord), une salle de travaux pratiques est mise à la disposition des étudiants et des séances de manipulations y sont organisées chaque semaine. L'enseignement de base est complété par un cours d'Aérodynamique et d'Hydrodynamique équivalant à un diplôme d'études supérieures : le thème en est choisi parmi les sujets de recherche et change chaque année. Ces recherches sont pour certaines de nature expérimentale et pour d'autres à caractère plus théorique ..., les secondes lui sont plus personnelles et portent principalement sur les phénomènes de turbulence. »

Les nouveaux bâtiments permettront d'élargir le champ des activités de l'IMFL qui, outre l'enseignement et des recherches scientifiques comporteront une part importante d'essais pour l'industrie aéronautique.

Les installations réalisées sont, en effet, considérables pour l'époque et comprennent notamment :

- une grande soufflerie horizontale, de type Eiffel, réalisée pour les établissements Neu (diamètre de veine 2, 20 mètres, vitesse maximum 60 mètres/seconde) équipée d'une balance pour l'enregistrement du comportement aérodynamique des modèles,

- un bassin hydrodynamique (longueur 22 mètres, section $1,5$ mètre $\times 1,5$

mètre) partiellement vitré, sur lequel se déplace un chariot porte-maquette pour mesurer les forces en jeu ou pour visualiser le sillage de modèles,

- des salles destinées à l'enseignement et aux travaux pratiques des étudiants, à des essais hydrauliques ou aérodynamiques divers etc ...

Une soufflerie verticale à courant ascendant dans une veine de diamètre 2 mètres est inaugurée le 8 avril 1938. Elle est installée pour permettre l'étude sur maquette du phénomène dangereux de la vrille des avions : il s'agit de savoir comment échapper au phénomène d'autorotation qui bouleverse les règles du pilotage. Ces recherches furent développées plus tard par André Martinot-Lagarde qui créa en 1967 une seconde soufflerie verticale.

3.2 Recherches d'ordre expérimental

Dès ses premières années, l'institut connut un vif essor ; de nombreuses expériences y furent entreprises dont des recherches systématiques sur les conditions de fonctionnement des sondes de pression statique et dynamique et l'utilisation des anémomètres en régime turbulent.

Avec A. Martinot-Lagarde et G. Rollin, Joseph Kampé de Fériet mit au point en 1938 un anémoclinomètre à tête sphérique pour mesurer les fluctuations de la vitesse du vent en grandeur et en direction. Cet appareil est décrit dans plusieurs de ses publications dont une Note aux *Comptes rendus* en 1938 [65], un rapport technique de 1941 [78], une description détaillée avec photographie étant donnée aux pages 7 à 9 de sa publication de 1936 *La turbulence atmosphérique* [57]. Cet appareil pouvait mesurer correctement des rafales d'une durée d'un peu inférieure à la seconde ; son succès lui valut des commandes de la Météorologie Nationale et de l'Amirauté Britannique.

Le champ d'activité de Joseph Kampé de Fériet à cette époque s'étendait à l'étude expérimentale de la turbulence atmosphérique et à la météorologie. Dans le cadre des relations suivies que l'institut entretenait depuis sa création avec l'O.N.M. (Office National Météorologique), il participa au programme de recherches théoriques et expérimentales sur la turbulence atmosphérique et plus particulièrement sur ses aspects utiles à l'aéronautique.

Membre de la Commission de la turbulence atmosphérique dès sa création par le Ministère de l'Air en avril 1935, il collabora à ce titre aux campagnes de vol à voile spécialement avec le centre de recherches aérologiques de la Banne d'Ordanche (Puy de Dôme) où l'O.N.M. et l'I.M.F.L. entretenaient déjà des postes d'observations depuis 1932 (voir sa publication [66] et la description des observations réalisées dans sa publication [57] *La turbulence atmosphérique*). Il fut représentant de la France aux conférences du centre allemand de Darmstadt l'I.S.T.U.S. (Internationale Studienkommission für den motorlosen Flug) dont il sera membre élu de 1935 à 1940.

A cette époque, il étudia les mouvements de l'atmosphère par enregistrement accéléré des nuages spécialement dans les Alpes. Des campagnes de recherche furent exécutées successivement autour du Mont Blanc et chaque année depuis 1934 à 3400 mètres d'altitude à la station scientifique de la Jungfraujoch ; des films furent réalisés au sommet de plusieurs 4000 mètres dans l'Oberland bernois. En 1936, il étudia les courants autour du Mont Cervin.

En 1938, lors du concours international de vol à voile de Berne, Joseph Kampé de Fériet fut conseiller technique de l'équipe de France et il explora avec le pilote Abrial le massif de la Jungfrau en avion et en planeur.

De décembre 1939 à mars 1940, une mission au Sahara sur la Hamada lui fut confiée pour y étudier en collaboration avec les services anglais l'influence des conditions atmosphériques sur la stabilité de l'atmosphère en prévision d'une attaque par les gaz. En outre, il profita des conditions exceptionnelles offertes par l'homogénéité de l'air pour effectuer diverses mesures sur « *l'inversion de température après le lever du soleil dans les couches basses de l'atmosphère* » qui firent l'objet d'une publication en 1942 dans *La Météorologie* [79]. On trouve aussi mention des observations alors réalisées dans « *Turbulent atmospheric diffusion : the first twenty-five years, 1920–1945* » publiée en 1974 dans Advances in Geophysics [226]. Avec l'exposé qu'il donna à Alger en mars 1951 au Colloque sur les actions éoliennes organisé par le CNRS (*La turbulence atmosphérique et les phénomènes d'érosion* publication [115] parue en 1953), ce seront les dernières publications consacrées à des problèmes expérimentaux qu'il donnera après-guerre, son attention étant alors quasi exclusivement portée vers des études théoriques découlant des problèmes de la turbulence qu'il avait déjà abordés entre 1930 et 1940.

3.3 Etude théorique des problèmes de turbulence

En effet, l'intense travail de direction et de gestion de l'IMFL et sa participation à de nombreuses études d'ordre expérimental ne l'empêchaient pas dès cette époque de participer au renouveau que connaissaient les études sur le problème de la turbulence.

De 1929 à 1933, il consacra trois publications [44], [45] et [49] à « *quelques cas d'intégration des équations du mouvement plan d'un fluide visqueux incompressible* » ; en supposant le tourbillon constant le long des lignes de courant, il résolvait complètement les équations ainsi linéarisées et retrouvait comme cas particulier un résultat dû à Hamel.

Mais c'est la communication qu'il donna le 8 février 1934 devant la Société Française de Navigation aérienne qui va l'orienter de manière décisive vers l'étude théorique des problèmes de la turbulence. Le mémoire qui en résultera fut intitulé *L'état actuel du problème de la turbulence* [51] ; il paraîtra en 1934 et 1935 dans la revue *La Science Aérienne.*

Après y avoir rappelé brièvement les équations de Navier et signalé quelques solutions exactes alors connues, il notait la difficulté d'une définition claire de la notion de turbulence et évoquait ensuite les travaux de Joseph Boussinesq et Osborne Reynolds sur la décomposition d'une propriété mesurable quelconque f du fluide en la somme d'une composante moyenne $\bar{f}$, seule accessible aux instruments de mesure et d'une composante d'agitation turbulente f'. Dans ce mémoire, il dégageait les règles que Reynolds avait imposées empiriquement à l'opération « prendre la moyenne » afin de passer des équations de Navier aux relations désormais appelées équations de Reynolds. C'était là pour lui l'amorce de toute une série de travaux qu'il entreprendra après guerre et qui culmineront avec l'exposé qu'il donnera à Milan en 1956 *La notion de moyenne dans la théorie de la turbulence.* [142], qu'il considérait comme l'une de ses contributions majeures, ces travaux étant évoqués plus loin.

Les recherches d'ordre théorique entreprises à l'Institut sous sa direction se concrétisèrent par plusieurs thèses dont celle de Ratip Berker et celle de François N. Frenkiel. Ceux-ci, après avoir quitté l'Institut devinrent, le premier, Doyen de la Faculté des Sciences d'Istanbul puis professeur associé à Lille et à la Sorbonne, le second, spécialiste de réputation mondiale de la turbulence, au service de la Navy à Washington D.C où Joseph Kampé de Fériet eut plus tard maintes fois l'occasion de le revoir pour entreprendre en commun des recherches évoquées plus loin.

Dès cette époque, Joseph Kampé de Fériet entreprend de fréquents séjours à l'étranger, y donnant des séries de leçons ou présentant des communications aux colloques internationaux de Mathématiques et de Mécanique théorique ou appliquée qu'il fréquente assidument. Ceci lui vaut d'être remarquablement informé des progrès continus de la théorie dans le domaine de la turbulence et dans celui des fonctions aléatoires par les liens d'amitié qu'il noue avec nombre de spécialistes de ces disciplines. Depuis 1935, il avait eu l'occasion de faire la connaissance de Norbert Wiener et il demeura en relations suivies avec lui jusqu'au décès de ce dernier. A cette époque, il entra aussi en rapport avec Théodore von Karman, ancien ministre de l'Education Nationale de Hongrie, professeur au California Institute of Technology à Pasadena.

Son premier séjour aux USA date de 1938 ; dans un mémorandum de septembre 1938 qu'il présente avant d'entreprendre ce voyage, il en définit comme suit les buts

A – Accomplir les missions qui m'ont été confiées par :

1. Le Ministère de l'Education Nationale (Comité Français de Mécanique) auprès des universités et des laboratoires d'Aérodynamique de l'Est des Etats-Unis.
2. L'Office National Météorologique auprès du Weather Bureau pour examiner les mesures prises pour la prévision des traversées de l'Atlantique Nord.
3. Le G.F.D.R.A.E. auprès des constructeurs d'aéronautique de Californie.

B – De répondre à l'invitation de mon excellent ami le Professeur von Karman

1. En prenant part au Turbulence Symposium à Cambridge (Massachussets) où je rencontrerai mes collègues Prandtl (Göttingen, Allemagne), G.I. Taylor (Cambridge, Angleterre).
2. En faisant des conférences sur la Turbulence à ses élèves du California Institute of Technology.

3. En faisant une conférence au Meeting de l'Institute of Aeronautical Science à Los Angeles.

G.I. Taylor, Prandtl et von Karman seront fréquemment cités dans les travaux qu'il consacrera à la turbulence. Prandtl avait introduit dès 1904 la notion de « couche limite » et Joseph Kampé de Fériet y consacra en 1943 une publication *Un problème clé de l'Aérodynamique : l'étude de la couche-limite* [81] que Monsieur Gérard Gontier considérera avec deux autres publications de Joseph Kampé de Fériet (*Ce que la mathématique doit à Descartes* [61] et « *Sous le signe de l'accélération* » [134] comme « de véritables chefs d'œuvres littéraires. » (cf. U.S.T.L. « *Histoire de la Faculté des Sciences* » 1854–1970. « *Notice bibliographique du Professeur Kampé de Fériet, fondateur de l'I.M.F.L.* » G. Gontier, mars 1996).

En tant que membre de la Commission Turbulence Atmosphérique, il est en relations suivies avec son président Philippe Wehrlé (1890–1965), directeur de l'O.N.M. et son adjoint Georges Dedebant (1902–1965), chef du service scientifique de cet organisme.

M. Bernard Bru dans l'article de juillet 1998 de la revue Matapli. « *A propos des modèles probabilistes de turbulence au début du XX*^e^ *siècle H. Villat (1879–1972) et G.I. Taylor (1886–1975)* » mentionne l'apport mutuel des recherches entreprises à cette époque dans les domaines respectifs de la théorie des fonctions aléatoires et de celle de la turbulence ; on y lit notamment page 61. « Nous ne pouvons terminer cette Note sans revenir à la météorologie française des années trente et aux travaux peu connus mais remarquables de Georges Dedebant et Philippe Wehrlé qui, associés à J. Kampé de Fériet, développeront une théorie originale des fonctions aléatoires adaptée à la mécanique des fluides turbulents. »

Dans le numéro 58 de la même revue, l'introduction à l'article de M. Jean Bass *Les méthodes probabilistes de la turbulence au milieu du XX*^{e} *siècle* mentionne aussi s'agissant de Ph. Wehrlé et G. Dedebant que : « Leurs idées ont eu un impact important sur d'autres spécialistes de la mécanique des fluides turbulents à commencer par J. Kampé de Fériet. » On retrouve trace de la collaboration entre ces trois auteurs dans plusieurs travaux de Joseph Kampé de Fériet ; c'est le cas de deux publications qu'il consacra à la turbulence atmosphérique en 1936 et 1938 ; il convient surtout de citer son article de novembre 1937.

Les bases d'une mécanique de la turbulence [60]

dans lequel, après avoir mentionné l'apport des travaux de L. Prandtl, Th. von Karman et G.I. Taylor, il analysait les travaux de Ph. Wehrlé et de ses collaborateurs ; page 376 de cet article, on lit par exemple : « La nouvelle mécanique de MM. Wehrlé et Dedebant est d'ailleurs sur bien des points à l'état de simple esquisse et son achèvement sera une œuvre de longue haleine ; mais deux points sont d'ores et déjà acquis dont l'importance m'apparaît fondamentale ; la notion d'échelle et *l'adoption rigoureuse, farouche pourrait-on dire du point de vue statistique* ... » De même p. 380 du même article, on lit également : « Le mouvement nous apparaît alors comme la superposition de deux champs :

Un champ moyen $\bar{f}$ stationnaire (indépendant de t) continu et dérivable en x, y, z.

Un champ d'agitation f' complètement décoordonné dans le temps et dans l'espace, qui ne sera plus connu de nous que par des courbes de fréquence, seuls les paramètres statistiques de ces courbes ayant droit de cité dans nos équations.

C'est là à mon avis, *le pas en avant*, accompli par la Mécanique de MM. Wehrlé et Dedebant qui la distingue essentiellement des théories antérieures beaucoup plus timides s'arrêtant à mi-chemin du point de vue statistique : en gardant aux f' la continuité et la dérivabilité, on nie au fond le caractère distinctif de la turbulence. »

Cette même idée est reprise dans l'article paru en 1938 *Some recent researches on turbulence* [70] ; il apparaît clairement qu'il adhère au point de vue statistique de Wehrlé et Dedebant.

Pour conclure sur ce point, il convient de se reporter au traité de A. Blanc-Lapierre et R. Fortet *La théorie des fonctions aléatoires*; au chapitre 14 dans lequel, à leur demande, Joseph Kampé de Fériet présente la théorie statistique de la turbulence, on lit p. 571 « Mais c'est à Ph. Wehrlé et G. Dedebant que revient le mérite d'avoir dans une série de travaux parus de 1935 à 1940, explicitement et fortement attiré l'attention sur la nécessité d'utiliser, dans la théorie statistique de la turbulence, les résultats de la théorie des fonctions aléatoires qui se développait rapidement à cette époque. C'est *sous leur impulsion* que nous avons en particulier nous même appliqué pour la première fois à la turbulence homogène les résultats que A. Kolmogoroff, A. Khintchine et N. Wiener venaient de publier ». Joseph Kampé de Fériet faisait ainsi implicitement référence à l'article *Les fonctions aléatoires stationnaires et la théorie statistique de la turbulence homogène* [71] qu'il publia en 1939 aux Annales de la Société Scientifique de Bruxelles.

Dans cet article qui fit date et qui demeure l'un de ses travaux le plus souvent cités, il présentait d'abord l'état de la théorie des fonctions aléatoires, montrait comment elle pouvait s'appliquer à la théorie de la turbulence en donnant une démonstration rigoureuse de certains résultats de G.I. Taylor.

Quasi simultanément, il publiait aux *Comptes rendus* une Note *Sur le spectre de la turbulence homogène* [69] dans laquelle, sur la base des travaux de Khintchine, il généralisait certains résultats dus à G.I. Taylor. Ce travail est aussi un prélude aux recherches qu'il consacrera en 1948 au tenseur spectral de la turbulence homogène, complétant ainsi les travaux que G.I. Taylor et Th. von Karman avaient consacrés au tenseur de corrélation.

On peut dire que ces deux publications sont l'amorce de toutes les recherches qu'il consacrera à partir de 1945 à l'élaboration d'une Mécanique Statistique de la Turbulence.

L'importance de ses travaux à cette époque est déjà considérable et lui vaut la considération de ses pairs et des autorités. Membre de l'Académie polonaise des Sciences de Varsovie où il est élu en 1930 et le demeurera jusqu'en 1939, il sera aussi membre élu de la Lilienthalgesellschaft de Berlin de 1936 à 1939, membre des sociétés polonaise et tchèque de mathématiques, du Circolo Matematico di Palermo et de nombreuses autres sociétés scientifiques ; il est aussi chevalier de la Légion d'Honneur depuis avril 1934.

3.4 Repli de l'I.M.F.L. à Toulouse

La déclaration de guerre en septembre 1939 va interrompre pour un temps les rencontres internationales et très rapidement influer sur l'activité de l'institut qu'il dirige.

A partir du 10 mai 1940, Joseph Kampé de Fériet prépare le repli de l'IMFL dans le Midi, ordonné le 16 mai. Ce déplacement massif de personnel et de matériel est réalisé avec une parfaite maîtrise malgré les dangers du moment.

Hébergé avec des moyens de fortune à Toulouse, l'I.M.F.L. put y reprendre partiellement son activité jusqu'en 1944, activité décrite en détail dans la Note de Monsieur Gérard Gontier jointe en annexe.

4 Période 1945–1982

Rentré à Lille en décembre 1944, Joseph Kampé de Fériet quitta la direction de l'I.M.F.L. en juillet 1945, confiant cette direction à André Martinot-Lagarde.

Nommé directeur honoraire de l'I.M.F.L., il va désormais consacrer toute son activité à son enseignement et à ses recherches.

4.1 La théorie générale de la turbulence fil directeur de ses recherches

En 1955, il fonde à Lille l'enseignement de la Mécanique des milieux continus. Monsieur Gérard Gontier note à ce sujet :

« Il a une façon à lui d'établir avec rigueur les équations de la dynamique des milieux continus alors que le plus souvent on se contentait d'appliquer les lois fondamentales de la dynamique des systèmes à de petits éléments de forme tétraédrique ou parallélépipédique ; la méthode usuelle ne conduisait guère au résultat que parce que ce résultat était connu d'avance et elle était évidemment dangereuse à manipuler en terrain inconnu ». Ses vues, il les précisera d'ailleurs dans deux publications. La première, fruit d'une conférence donnée en 1959 à l'Institut Henri Poincaré paraîtra en 1961 sous le titre *Les équations fondamentales de la Mécanique des milieux continus* [171] dans un numéro spécial de la revue « Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public », consacré à la mécanique.

La seconde parut à Berlin en 1962 sous le titre *Remarques sur les équations du mouvement d'un milieu continu* [176] ; il y insistait notamment sur l'utilité de la formule de Green pour rétablir de manière simple et rigoureuse les équations générales de la Mécanique des milieux continus.

Dès 1946, Joseph Kampé de Fériet effectua un second séjour aux USA et, lors d'une série de leçons qu'il donna au M.I.T. et à Harvard, Norbert Wiener le mit au courant de ses travaux sur la cybernétique qu'il venait de créer et Claude Shannon de ses recherches sur la théorie de l'Information ; il prit aussi contact avec les premiers ordinateurs en service. De retour à Lille, il y donna une série de conférences sur ces thèmes. Dans le cadre des enseignements du Centre de Calcul de la Faculté des Sciences, il donna en 1961–1962 un *Cours sur la théorie de l'Information* [178] aux étudiants de la faculté et de l'I.D.N. qu'il reprendra de manière beaucoup plus approfondie en 1963 dans une série de leçons données successivement à l'Indian Institute of Science à Bangalore (*Information theory and Statistical Mechanics* publication [182]) et à la Faculté des Sciences de Lille (*Théorie de l'Information ; principe du maximum de l'entropie et ses applications à la théorie de l'estimation et à la mécanique statistique* publication [183]) et à Varenna du 21 au 29 août 1964 (*La théorie de l'Information et la mécanique statistique classique des systèmes en équilibre* [185]).

Son départ à la retraite le 1er octobre 1964 n'interrompt pas son activité de recherche qui se traduit par plus de 150 publications de 1946 à 1982 dont une cinquantaine entre 1964 et 1982.

Il faut cependant revenir à 1933 pour décrire dans le détail cet ensemble de travaux et tenter d'en faire ressortir l'unité en dépit d'une apparente diversité des sujets traités ; il a toujours insisté sur cette unité et fait ressortir que la théorie de la turbulence qu'il a étudiée dès 1933 constituait le fil directeur de ses travaux qu'il s'agisse de ceux consacrés à la notion de moyenne et des études consacrées aux solutions aléatoires d'équations aux dérivées partielles introduites en vue d'élaborer une mécanique statistique des milieux continus ; l'étude de ces solutions aléatoires le conduisit aussi à la construction de mesures de probabilité sur certains espaces fonctionnels, le choix de ces mesures devant s'inspirer de la théorie de l'Information de Wiener-Shannon.

Il convient de noter ici qu'hormis des contributions importantes à des ouvrages déjà cités, Joseph Kampé de Fériet avait pour habitude au fur et à mesure que ses travaux dans un domaine déterminé progressaient, après en avoir publié l'essentiel sous forme de Notes aux *Comptes rendus*, d'en donner une version développée sous forme d'une synthèse fruit de leçons sur ce thème. Parmi ces synthèses, il convient notamment de citer *Problèmes mathématiques de la turbulence homogène* [154], résultat de leçons données à Varenna en 1957, *Kinematics of homogeneous turbulence* [153] et [167], fruit de travaux poursuivis avec Garrett Birkhoff, généralisés en 1973 dans *Statistically well set Cauchy problems* [222] et la conférence qu'il donna en mai 1964 à Washington *Random integrals of differential equations* [184], ces deux dernières publications constituant l'état ultime des recherches qu'il avait entreprises depuis 1933 si l'on excepte celles qu'il consacrera à partir de 1967 à la théorie de l'information dite généralisée qui constitue un domaine un peu autonome dans ses travaux.

Avant d'aborder le détail de ceux-ci, il convient de remarquer comme on le verra dans la liste de ses publications, que ces recherches en apparence diverses étaient menées le plus souvent simultanément, les résultats obtenus dans une voie interférant en fait le plus souvent pour les autres thèmes.

Néanmoins, en bousculant quelque peu l'ordre chronologique, et au prix de quelques redites et d'un certain arbitraire, ces travaux peuvent être étudiés dans l'ordre suivant :

1. Théorie générale de la turbulence. Equations de Navier-Stokes et équations de Reynolds. Notion de moyenne.

2. Interprétation probabiliste de la notion de turbulence. Représentation des fonctions aléatoires. Mesures de probabilité sur les espaces fonctionnels. Processus du mouvement brownien et pseudo intégrales de Stieltjes.

3. Fonctions aléatoires stationnaires. Analyse harmonique généralisée. Tenseur spectral de la turbulence homogène.

4. Élaboration d'une mécanique statistique des milieux continus. Solutions aléatoires d'équations aux dérivées partielles.

5. Théorie de l'Information de Wiener-Shannon et théorie de l'Information généralisée.

4.2 Travaux consacrés à la théorie générale de la turbulence. Equations de Navier-Stokes et de Reynolds. Notion de moyenne.

La plupart des travaux que Joseph Kampé de Fériet a consacrés aux problèmes de la turbulence sont précédés d'un historique relatant les étapes successives du développement de cette théorie. Celles-ci sont décrites en détail dans les leçons qu'il donna au C.I.M.E. à Varenna en septembre 1957 publiées sous le titre *Problèmes mathématiques de la théorie de la turbulence homogène* [154].

Il y rappelait d'abord que les équations régissant la théorie des fluides visqueux incompressibles furent posées par Navier en 1825 et retrouvées par Stokes en 1845 sous la forme :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_j}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(u_j u_k) &= \nu\Delta u_j-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j}+X_j\,, \qquad j=1,2,3\,,\\ \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} &= 0\,.\end{aligned}$$

Dans ces équations dites de Navier-Stokes, le vecteur $u(x_1,x_2,x_3,t)$ de composantes u_1,u_2,u_3 désigne la vitesse du fluide au point de coordonnées x_1,x_2,x_3 à l'instant t, à température constante, $p(x_1,x_2,x_3,t)$ la pression, ρ la masse spécifique du fluide, $X=(X_1,X_2,X_3)$ les forces extérieures et ν le cœfficient de viscosité, le fluide étant supposé incompressible et de conductibilité thermique infinie.

Dans sa publication déjà citée de 1934–1935, *L'état actuel du problème de la turbulence* [51]. Joseph Kampé de Fériet avait introduit quelques cas élémentaires où l'étude du problème pouvait être menée à bien mais il soulignera les difficultés auxquelles on se heurte en général, difficultés liées au caractère non linéaire des équations de Navier-Stokes. Dans le premier chapitre des leçons données à Varenna en 1957, il mettait en évidence l'apport que constituent les résultats connus de la théorie de l'équation de la chaleur pour progresser dans l'étude des solutions des équations de Navier-Stokes. Il avait déjà souligné ce point en août 1952 à Istanbul lors du 8e congrès international de mécanique théorique et appliquée (cf. sa publication [121] *L'unicité du mouvement d'un fluide visqueux incompressible et l'équation de la chaleur*) et il le réénonce comme suit :

« Chaque fois que l'on se propose, en effet, de démontrer un théorème affirmant que toute intégrale des équations de Navier possédant les propriétés $A,B,C\ldots$ possède nécessairement la propriété P, il suffit de vérifier si, pour une intégrale de l'équation de la chaleur, les propriétés $A,B,C\ldots$ impliquent toujours la propriété P ; si ce n'est pas le cas, on est certain que le théorème est faux et il est inutile de s'acharner à sa démonstration. » Il illustre ce propos à l'aide d'exemples tirés de propriétés connues de l'équation de la chaleur et en déduit par exemple l'existence d'intégrales des équations de Navier-Stokes non analytiques en t.

Il souligne aussi un point essentiel à ses yeux pour l'étude de ces équations :

« La notion de turbulence homogène s'oppose à considérer la force vive totale comme finie, des fonctions $u_j(x,t)$ périodiques en x doivent pouvoir entrer comme cas particulier dans le cadre général des champs de vecteurs spatialement homogènes ...

« Si l'on ne fait aucune autre hypothèse que l'existence de la force vive pour tout domaine B fini, l'ensemble des champs de vitesses correspondant à une turbulence homogène constitue un espace fonctionnel appartenant à la catégorie des espaces de G. Mackey. »

C'est là une de ses idées force que l'on retrouvera dans la plupart de ses publications relatives à la turbulence notamment dans *Kinematics of homogeneous turbulence* [153] et [167].

Il réaffirme aussi le lien entre équation de la chaleur et équations de Navier-Stokes dans le second chapitre de ses leçons de Varenna qu'il consacre au *Modèle de Bürgers* :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

lequel comme l'ont prouvé les travaux de J.B. Cole et d'E. Hopf se ramène à l'équation de la chaleur.

En l'absence de résultats relatifs aux équations de Navier-Stokes et en l'attente de ceux-ci, Joseph Kampé de Fériet va s'efforcer de bâtir un cadre mathématique plus général d'où ses travaux consacrés aux fonctions aléatoires et à la mécanique statistique des milieux continus.

Avant de les aborder, il convient d'abord de présenter ce qu'il considérait comme l'une de ses contributions majeures, les travaux qu'il consacra aux transformations de Reynolds liées à l'opération « prendre la moyenne d'une quantité physique ».

Équations de Navier et de Reynolds. La notion de moyenne

Dans l'étude historique qu'il consacrait à la notion de turbulence, Joseph Kampé de Fériet rappelait que, dès les débuts de la théorie, on constatait par exemple dans l'écoulement d'un fluide dans un cylindre un désaccord complet entre les prévisions déduites de la théorie et les mesures expérimentales et signalait cependant qu'H. Poiseuille en 1842, opérant sur des tubes capillaires, obtenait un accord excellent entre résultats expérimentaux et théoriques. Ceci l'amenait à citer le mot bien connu de Barré de Saint-Venant « L'hydraulique est une désespérante énigme. »

Après avoir signalé que ces phénomènes sont dûs à ce que l'on a appelé la turbulence, la vitesse d'une molécule fluide changeant avec une extrême rapidité d'un point à un autre et d'un instant à un autre, il rappelait que Joseph Boussinesq en 1872 et Osborne Reynolds en 1895 ont indépendamment exprimé l'idée fondamentale de la nécessité de décomposer une propriété quelconque d'un fluide en mouvement notée $f(x_1, x_2, x_3, t)$ sous la forme

$$f(x_1, x_2, x_3, t) = \bar{f}(x_1, x_2, x_3, t) + f'(x_1, x_2, x_3, t)\,,$$

$\bar{f}$ désignant *la composante moyenne seule accessible à l'expérience* et f' la composante d'agitation qui traduit la turbulence. Joseph Kampé de Fériet dans ses leçons de Varenna analysait en détail les idées de Boussinesq et de Reynolds et notamment le calcul de la moyenne $\bar{f}$ que Boussinesq définit par une moyenne temporelle $\frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(x,y,z,s)\,\mathrm{d}s$ tandis que Reynolds l'exprime par une moyenne spatiale :

$$\frac{1}{V_x}\int_{B_x} f(y_1,y_2,y_3,t)\,\mathrm{d}y_1,\,\mathrm{d}y_2\,\mathrm{d}y_3 \quad \text{pour un certain volume} \quad B_x$$

de l'espace entourant le point x, d'autres auteurs ayant par ailleurs cumulé les deux procédés.

Reynolds utilisait la moyenne qu'il venait de définir pour écrire les équations que doivent vérifier les composantes moyennes $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$ des vitesses, équations qui portent désormais son nom :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{u}_j \bar{u}_k) &= \nu \Delta \bar{u}_j - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{u'_j u'_k}) + \bar{X}_j\,, \quad j=1,2,3 \\ \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{u}_k) &= 0\,. \end{aligned}$$

Dès 1935 dans *L'état actuel du problème de la turbulence* [51], Joseph Kampé de Fériet notait que les équations de Reynolds ne se déduisent de celles de Navier-Stokes que si et seulement si l'opération de moyenne désormais connue sous le nom d'opérateur de Reynolds noté $\mathcal{R}$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(f+g) &= \mathcal{R}(f) + \mathcal{R}(g)\,, \\ \mathcal{R}(\alpha f) &= \alpha \mathcal{R}(f)\,, \quad \alpha \quad \text{constante réelle,} \\ \mathcal{R}(\mathcal{R}(f)g) &= \mathcal{R}(f)\mathcal{R}(g)\,, \\ \mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{R}(f) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\mathcal{R}(f) \quad j=1,2,3\,. \end{aligned}$$

Il notait que ces règles utilisées par Reynolds sans être explicitées résultaient du passage de la théorie cinétique au mouvement d'un fluide continu. A la page 76 des *Problèmes mathématiques de la turbulence homogène*, on lit :

« Bien que le nom de James Clark Maxwell ne soit mentionné nulle part dans le mémoire d'Osborne Reynolds, on est très frappé par l'analogie de ses raisonnements avec ceux de Maxwell dans l'établissement de ses fameuses « *équations de transfert* » (1868), la méthode par laquelle Reynolds cherche à tirer ses équations des équations de Navier semble calquée sur celle par laquelle Maxwell démontre (ou croit démontrer ! ...) les équations de Navier à partir de la théorie cinétique. Pour Maxwell, aucun doute n'est possible, les moyennes sont des moyennes statistiques, la fonction de distribution, qui équivaut à une loi de probabilité dans l'espace des vitesses, intervenant constamment. Quant à Reynolds dont la pensée semble loin d'être arrivée à la maturité de celle de Maxwell sur les principes de base, on a l'impression que, tandis qu'il pense dans son subconscient en termes statistiques, sa plume écrit, en fait, des moyennes spatiales. Pour Maxwell, cette transposition n'aurait soulevé, d'ailleurs, pas l'ombre d'une difficulté, moyennes statistiques, moyennes spatiales, moyennes temporelles étant toutes égales en vertu d'un *principe ergodique* qui lui apparaissait comme une évidence physique pour les systèmes possédant un très grand nombre de degrés de liberté. »

En 1972, Joseph Kampé de Fériet remarquait que plus de 120 travaux avaient été consacrés à la notion de moyenne dont outre ceux qu'il avait publiés lui-même, ceux de Garrett Birkhoff et la thèse de son élève J. Sopka soutenue à Harvard en 1950 et aussi ceux de Madame Dubreil-Jacotin et de ses élèves J. Arbault et J. Molinaro, ceux de Gian Carlo Rota, une liste partielle étant donnée dans les leçons de Varenna auxquelles contribua aussi Madame Dubreil-Jacotin.

En avril 1949 dans le cycle de conférences *Turbulencia* [100] que Joseph Kampé de Fériet donna à Madrid, il montrait que le problème ne prend son sens véritable que si on le formule dans le langage de l'algèbre abstraite et il traita le cas où l'ensemble X sur lequel sont définies les fonctions est fini. Cette même année, il publia aux Annales de la Société Scientifique de Bruxelles un mémoire : *Sur un problème abstrait posé par la définition de la moyenne dans la théorie de la turbulence* [104] et il y étudiait le cas d'un anneau $\mathcal{R}$ de fonctions définies sur un ensemble X pourvu d'une topologie, chacune de ces fonctions ne prenait qu'un nombre fini de valeurs dans un corps K commutatif. Il y faisait référence à des travaux récents de Garrett Birkhoff sur le sujet et liait le problème à la théorie des partitions.

En effet, lors de nombreux échanges de vues qu'il avait eus au printemps 1949 à Harvard avec Garrett Birkhoff, celui-ci avait attiré son attention sur le rôle joué par les idempotents et avait signalé que les conditions topologiques se laissaient avantageusement remplacer par l'introduction d'une structure réticulée. Birkhoff remarqua que la correspondance entre la fonction et sa moyenne définie par ces axiomes constituait une nouvelle classe de transformations, qualifiées désormais de *transformations de Reynolds* auxquelles les algébristes n'avaient pas songé et qu'il qualifia d'*Averaging Operators* dans son traité *Lattice Theory* (A.M.S. Colloquium publications vol. XXV, Providence (R.I.) 3rd Edition, 1973, p. 407–410). Birkhoff, dès septembre 1949, résolut complètement le cas où les fonctions considérées sont les fonctions continues sur un ensemble compact (« *Moyenne des fonctions bornées* ». Colloque d'Algèbre et de Théorie des nombres, Paris, sept. 1949, p. 143–153). Ses résultats furent complétés en 1950 par son élève J. Sopka (*On the characterization of Reynold operators on the algebra of all continuous functions on a compact Hausdorff space,* thesis, Harvard University, 1950).

Tandis que le mémoire publié par Joseph Kampé de Fériet en 1935 n'avait pas retenu l'attention des spécialistes, ceux de 1949 et la conférence de 1949 attirèrent l'attention de Madame Dubreil-Jacotin et de ses élèves. Madame Dubreil-Jacotin introduisit la notion de transformation de Reynolds régulière (cf. *Etude algébrique des transformations de Reynolds.* Colloque d'Algèbre Supérieure, Bruxelles, 19 au 22 septembre 1956, p. 9 à 27) et proposa de généraliser la relation $\mathcal{R}(f\mathcal{R}(g)) = \mathcal{R}(f)\mathcal{R}(g)$ en la remplaçant par $\mathcal{R}(f\mathcal{R}(g) + g\mathcal{R}(f)) = \mathcal{R}(f)\mathcal{R}(g) + \mathcal{R}(\mathcal{R}(f)\mathcal{R}(g))$. Parmi les publications qu'il avait consacrées au problème (voir outre celles déjà citées, ses publications [109], [112], [114], [122] p.

610–614, [125], [131], [132], [133], [142], [154]) Joseph Kampé de Fériet considérait comme essentielle celle qui résultait de la conférence qu'il donna à Milan le 8 mai 1956 : *La notion de moyenne dans la théorie de la turbulence* [142]. Il y faisait le point des étapes successives de sa recherche et des résultats obtenus par lui-même et divers auteurs. Parmi ceux-ci il faisait référence aux travaux de Madame Shu-Teh-Chen-Moy (*Characterisation of conditional expectation as a transformation on function space,* Pacific Journal of Mathematics, t.4, n° 1, March 1954, p. 47–63) ; elle y avait démontré que lorsque l'ensemble des fonctions considérées n'est autre que celui des fonctions mesurables définies sur un espace de probabilité, une transformation de Reynolds n'est autre qu'une espérance conditionnelle, résultat que Joseph Kampé de Fériet avait ensuite généralisé au cas d'un espace de mesure avec une mesure σ-finie. (cf. ses publications [131], [132], [133]).

Dans les leçons déjà citées qu'il donna au C.I.M.E. à Varenna du 1er au 10 septembre 1957 et qui constituent le dernier travail où il aborde ce problème, il fit à nouveau le point de ses travaux et de ceux qu'ils avaient suscités. A la page 74 de cette publication, il notait que la moyenne statistique $\overline{f(x,t)} = \int_\Omega f(x,t,\omega)d\mu(\omega)$ obéissait aux règles de Reynolds et il soulignait que les définitions de la moyenne introduites par Boussinesq et Reynolds supposaient en fait l'existence d'un théorème ergodique en théorie de la turbulence.

Ces remarques avaient déjà été formulées dans l'exposé qu'il donna à Milan en 1956. Nous reproduisons ci-dessous in extenso sa conclusion qui résume l'essentiel des recherches qu'il a entreprises : « Mais dès que l'on cherche à approfondir la méthode pour l'appliquer à des problèmes précis de Mécanique des Fluides, on voit se dresser devant soi des obstacles qui, selon notre opinion, sont loin d'être tous surmontés aujourd'hui.

« Pour que les calculs conduisant aux équations de Reynolds aient un sens, il faut introduire des *solutions aléatoires* $u_j(x,t,\omega)$, $p(x,t,\omega)$ des équations de Navier c'est-à-dire un ensemble de solutions de ces équations dépendant d'un paramètre ω, mesurables par rapport à ω pour tout (x,t) fixé.

« En vue des applications à la turbulence, on ne peut laisser Ω et μ dans l'abstrait ....

« Dans notre choix de Ω et μ, nous ne pouvons nous permettre que des choix *naturels*, suggérés par une hypothèse valable en Mécanique des Fluides. C'est donc la Mécanique Statistique classique qui doit, ici, nous servir de guide : le hasard doit intervenir dans notre problème par l'intermédiaire des conditions initiales ; il faut étendre aux milieux continus pour lesquels l'espace des phases Ω sera nécessairement un espace fonctionnel, les méthodes utilisées pour les systèmes ayant un nombre fini de degrés de liberté.

« Nous sommes conduits à l'étude des solutions des équations (ou des systèmes d'équations) aux dérivées partielles quand les données initiales sont aléatoires ...

« ... La définition de la moyenne sur un ensemble de solutions de l'équation de Navier résout toutes les difficultés du passage des équations de Navier aux équations de Reynolds, tant que l'on demeure sur un plan abstrait ; mais dès que l'on veut préciser Ω et μ, pour obtenir $\overline{u_j}(x,t), \bar{p}(x,t)$ dans un problème concret de la théorie de la turbulence, on se heurte aux conséquences de notre ignorance des propriétés générales des équations des de Navier. »

Ce domaine de la mécanique statistique des milieux continus n'était pas alors pour lui une page vierge car ses premiers travaux en la matière remontent à 1949 comme on le verra plus loin.

4.3 Interprétation probabiliste de la notion de turbulence. Représentation des fonctions aléatoires ; mesures de probabilité sur certains espaces fonctionnels. Fonction aléatoire du mouvement brownien et pseudo-intégrales de Stieltjes

En accord avec les idées de G. Dedebandt et Ph. Wehrlé, Joseph Kampé de Fériet, dès les années trente, avait fait sienne une interprétation probabiliste de la notion de turbulence. A plusieurs reprises, il soulignera combien ceci était déjà implicitement présent dans l'œuvre de Boussinesq et de Reynolds. Par exemple, en 1962, dans *Statistical mechanics of continuous media* [168], il note : « The instability of some flows ... results, in many cases, in phenomena of an extremely complicated nature ; it has been recognized since J. Boussinesq (1872) and O. Reynolds (1895) that the chaotic nature of the phenomena was such that one must deal only with *averages* of the physical properties of the fluid, i.e. build a *statistical theory of turbulence* .... »

« It has always been our opinion that a statistical theory of turbulence required for a sound foundation a general Statistical Mechanics of fluids, based directly on the equations of motion, just as the Statistical Mechanics of dynamical systems is based on the equations of Hamilton- Jacobi. » Ceci supposait d'abord une étude des propriétés des fonctions aléatoires auxquelles Joseph Kampé de Fériet s'était intéressé dès 1939 dans sa publication déjà évoquée aux Annales de la Société Scientifique de Bruxelles : *Les fonctions aléatoires stationnaires et la théorie statistique de la turbulence homogène* [71].

Représentation des fonctions aléatoires. Modèles de Wiener et de Doob.

Dans *Fonctions aléatoires et théorie statistique de la turbulence*, aux pages 572 et 573 du traité de A. Blanc-Lapierre et R. Fortet, Joseph Kampé de Fériet présente successivement les deux formulations de la notion de fonction aléatoire dues à Wiener et à Doob. Il présente d'abord celle de Wiener comme suit :
« A ce point de vue, une fonction aléatoire réelle de la variable aléatoire réelle t est considérée comme un ensemble de fonctions dépendant d'un paramètre ω, $F(t,\omega)$, ce paramètre ω étant choisi au hasard selon une loi de probabilité donnée dans un ensemble Ω. » puis celle de Doob :
« On considère une fonction aléatoire comme définie par une mesure dans l'espace Ω de toutes les fonctions réelles $f(t)$. » Il signale que « J.L. Doob et W. Ambrose, dans un travail fondamental (*On two formulations of the theory of*

stochastic processes depending upon a continuous parameter. Amer. Journ. of Maths, 41, 1940, p. 737) ont démontré que les deux points de vue sont substantiellement équivalents pour la définition d'une fonction aléatoire ».

Il dit toutefois sa préférence très nette pour la première présentation qui lui paraît mieux correspondre aux applications de la Physique mathématique. C'est cette présentation qu'il adoptera donc dans la plupart de ses travaux tout au moins jusqu'en 1956.

Parmi ces travaux, il faut d'abord citer une Note aux *Comptes rendus* du 7 juillet 1947 *Sur une représentation des fonctions aléatoires* [89]. Il y préconise un modèle de construction d'une fonction aléatoire en partant d'une fonction f définie sur un espace probabilisé, mesurable, et d'un groupe abélien $(T_t\,;\, t \in \mathbb{R})$ de bijections mesurables de Ω sur lui-même telles que pour tous t et s réels $T_{t+s} = T_t . T_s$.

Il définit la fonction aléatoire par $X_t(\omega) = f(T_t\omega)$, fonction strictement stationnaire si et seulement si les transformations T_t conservent la probabilité. Partant d'une remarque de Doob il conclut que sa méthode est générale.

Dans une seconde Note aux *Comptes rendus* du 8 septembre 1947, il généralise sa représentation et ses résultats en remplaçant la droite réelle par un groupe abstrait G. En utilisant une représentation Γ du groupe G dans le groupe des bijections mesurables de Ω, à chaque α appartenant à G correspond une bijection mesurable T_α de Ω sur lui-même, telle que pour tous α et β appartenant à G : $T_{\alpha.\beta} = T_\alpha . T_\beta$. Partant d'une fonction numérique mesurable définie sur Ω, il pose $X(\alpha, \omega) = f(T_\alpha\omega)$ d'où une fonction aléatoire mesurable sur Ω ; de plus, il note que si G est un groupe topologique localement compact muni de la mesure de Haar en posant $\Omega = G$ et $X(\alpha)(\omega) = f(\alpha, \omega)$ on définit ainsi une fonction aléatoire stationnaire.

A l'aide de ces résultats et de la décomposition spectrale d'un groupe d'opérateurs unitaires, il va obtenir une représentation des fonctions aléatoires stationnaires d'ordre deux qui lui permet de retrouver certains résultats dûs à Harald Cramér et à Michel Loeve.

Dans une première Note aux *Comptes rendus* du 13 octobre 1947 *Analyse harmonique des fonctions aléatoires strictement stationnaires* [91], en utilisant sa représentation $X_t(\omega) = f(T_t\omega)$, il remarque qu'en posant $f(T_t\omega) = U_t(f(\omega)), \{U_t\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ définit un groupe abélien d'opérateurs unitaires sur l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$.

Il considère ensuite l'ensemble $\mathcal{E}_\lambda$ des projections qui constitue la décomposition de l'identité au sens de Stone pour le groupe $\{U_t\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ et définissant : $E_\lambda(\omega) = \mathcal{E}_\lambda(f(\omega))$, il traduit la décomposition de Stone sous la forme :

$$E(X_t\bar{Y}) \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} \exp(i\lambda t)\, \mathrm{d}(E(E_\lambda, \bar{Y})) \quad Y \in L^2(\Omega)$$

d'où en particulier

$$E(X_{t+h}\bar{X}_t) \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} \exp(ih\lambda)\, \mathrm{d}(E((|E_\lambda(\omega)|^2)\,,$$

ce qui équivaut à la décomposition harmonique d'un processus aléatoire stationnaire d'ordre deux à l'aide d'une fonction aléatoire $E(\lambda)$ orthogonale à ses accroissements, résultat établi par Loeve sous l'hypothèse moins stricte de stationnarité d'ordre deux de la fonction aléatoire X_t. Dans une seconde Note aux *Comptes rendus* du 15 mars 1948 *Analyse harmonique des fonctions aléatoires stationnaires d'ordre deux définies sur un groupe abélien localement compact* [94], il généralise son résultat antérieur et celui de Loeve en utilisant une généralisation de la décomposition spectrale de Von Neumann-Stone dûe à M. Neumark, W. Ambrose, R. Godement et E. Arnous lorsque le groupe d'opérateurs unitaires est un groupe abélien. Les résultats qu'il obtint ainsi généralisaient au cas d'un groupe abélien localement compact la représentation obtenue par Khintchine pour la corrélation d'une fonction aléatoire stationnaire.

L'ensemble de tous ces résultats sera repris dans l'exposé de synthèse. *Fonctions aléatoires stationnaires et groupes de transformations dans un espace abstrait* [96] qu'il présenta au Colloque international de Calcul des probabilités et de statistique tenu à Lyon du 28 juin au 3 juillet 1948. On les retrouve aussi aux paragraphes 5 à 10, pages 580 à 592 de sa contribution au traité de A. Blanc-Lapierre et R. Fortet ce qui lui permit de donner une présentation unifiée de sa théorie du tenseur spectral de la turbulence étudiée plus loin.

En 1958, Joseph Kampé de Fériet et Garrett Birkhoff publient la première partie de *Kinematics of homogeneous turbulence* [153] dont la partie A est consacrée aux champs de vecteurs aléatoires mesurables, d'énergie finie sur tout compact ; ils la présentent comme suit : « In this paper, we consider homogeneous turbulent velocity fields at a particular time t, limiting ourselves to the kinematics of the probleme. Hence we are concerned with random vector fields (RVF) defined in infinite 3-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^3$ -though for the sake of generality we consider R.V.F. with q components in p-dimensional space $\mathbb{R}^p$.

« There are several ways to define R.V.F. Since 1939, one of us has systematically considered a R.V.F. to be given by a vector function $u(x, \omega)$ defined and measurable on the product space $\mathbb{R}^p \times \Omega$ where Ω is an unspecified *abstract* probability space ....

« In [7] (i.e. Joseph Kampé de Fériet *Théorie statistique de la turbulence* dans A. Blanc-Lapierre et R. Fortet *Théorie des fonctions aléatoires,*) a systematic exposition of the kinematics of turbulence was given of this point of wiew, which has various mathematical advantages. It has, however, the disadvantage that the construction of such a function $u(x, \omega)$ from observational data is not described.

« Therefore, in this paper a different procedure is followed. We consider first *a sample probability space* Λ, which consists of all velocity fields $u(x)$ which are measurable and have finite energy on compact sets. This class of fields seems sufficiently general. We define Λ as a topological linear space, and assume that the measure is « *regular* » in the sense of being determined by the measures of Borel sets in Λ. In principle, one could consider the frequency with which $\alpha_{jk} < \int_{D_j} u_k(x)\, \mathrm{d}m(x) < \beta_{jk}$ as a multivariate distribution determinable experimentally in the usual way as a statistical frequency. From such frequenties μ, the measure on Λ could be (approximately) determined experimentally to any accuracy .... »

Joseph Kampé de Fériet et Garrett Birkhoff notent aussi : « It corresponds closely to what Doob calls a process of "function space type" for which the sample function and the element of Ω coincide.

« In part A of the present paper *we show that it is effectively equivalent to that followed in* [7]. Define a regular measure on Λ as "admissible" if it has finite kinetic energy expectation $\bar{E}_D$ on any compact D of physical space $\mathbb{R}^p$, we show how to construct $u(x, \alpha)$ on the product space $\mathbb{R}^p \times I$ where I is the unit interval from any such admissible measure. We prove that any regular measure is strictly separable and metrically separable; also we etablish the connections between admissible measures and "measurably random fields" (i.e. $u_j(x, \omega)$ measurable with respect to the product measure $m \times \mu$). We prove that the sets $(\mathcal{C}), (\mathcal{C}^k)$ and $\mathcal{C}^\infty$ of continuous vector fields, k-ply continuous differentiable vector fields, and vector fields having continuous derivatives of all orders are all measurable for any regular probability measure on Λ. »

Nous avons tenu à citer *in extenso* ce texte car il constitue en quelque sorte un tournant dans l'œuvre de Joseph Kampé de Fériet ; ayant établi l'équivalence des deux représentations, il va désormais consacrer une partie importante de ses travaux à la construction de mesures de probabilité sur certains espaces fonctionnels dont les espaces de Banach ou de Fréchet à base dénombrable de Schauder.

Joseph Kampé de Fériet, Garrett Birkhoff et Jerry Bona généraliseront les résultats de la partie A de *Kinematics of homogeneous turbulence* en 1973 dans *Statistically well-set Cauchy problems* [222] en les étendant notamment à certains espaces de distributions. Il convient aussi de remarquer que les mesures de probabilité utilisées par Joseph Kampé de Fériet sont toujours supposées complètes ce qui l'amènera avec Birkhoff à définir une mesure comme régulière si elle est la complétion au sens de Lebesgue de sa restriction aux ensembles boréliens, ce concept de régularité étant étudié de manière approfondie dans *Kinematics of homogeneous turbulence* et dans *Statistically well set Cauchy problems* .

Mesures de probabilité dans certains espaces fonctionnels.

Le changement de point de vue que l'on vient de signaler apparaissait déjà dans une lettre du 8 mars 1956 que Joseph Kampé de Fériet adressait à Garrett Birkhoff dans les termes suivants : « Since my last visit to Harvard, I understand more and more clearly how important it is, for the physical application, to substitute to the abstract measure space $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ which is the formal basis of all my work in the « Book » very specific function space; the ω-method which I use since my Bruxelles paper in 1939, is still my beloved child, but I now realize fully that, in each problem one must take a definite choice of some well suited function spaces for Ω; only this choice gives life to the aetherean ω- method ...

« For this reason I take more and more interest to the construction of measure in function spaces; the paper of Miss Mourier has helped me very much; but as you and Mackey have pointed except in the case of a separable Hilbert space, she does not give any specific method to define a measure in a Banach space.

« When at Harvard, I had one idea leading to the construction of a L-measure in Banach spaces and I wrote a note on 16^{th} November, George Mackey pointed to me, that the method was all right if I could prove that the subset Ω of $\mathbb{R}^\infty$ which I was using as foundation has measure one.

« This important remark did in fact lead me to the construction of a measure in any measurable Hilbert space which I used in my draft for our joint paper and to which I gave the final touch in my Darmois lecture (this seems to me the more elegant presentation). Now I am able to do exactly the same for a large class of Banach spaces (how large it is I do not know, but several useful spaces belong to it.) »

En écrivant ceci à Garrett Birkhoff, Joseph Kampé de Fériet débute tout un ensemble de travaux consacrés à la construction de L- mesures de probabilité sur certains espaces fonctionnels pour établir des solutions aléatoires de certaines équations aux dérivées partielles linéaires. Le premier d'entre eux, d'ailleurs évoqué dans sa lettre, est le fruit de l'exposé qu'il donne au séminaire Darmois à l'Institut Henri Poincaré le 20 janvier 1956 : *Représentation d'un champ vectoriel aléatoire ayant une matrice de covariance donnée* [141]. Il commence par rappeler quelques exemples de fonctions aléatoires vérifiant la même équation aux dérivées partielles que leur covariance et ceci l'amène à poser le problème d'une généralisation comme suit : « Etant donnée une matrice de covariances $\Gamma(x,y)(x=(x_1,\ldots,x_p), y=(y_1,y_2,\ldots,y_p))$ où $\Gamma(x,y)=(\Gamma_{jk}(x,y))j$ et $k=1,2,\ldots,p$ si Γ satisfait simultanément en x et y à p équations aux dérivées partielles, construire un vecteur aléatoire $u(x,\omega)=\{u_j(x,\omega), j=1,2,\ldots,p\}$ admettant pour matrice de covariances Γ et tel que chaque échantillon soit intégrale de ce système d'équations aux dérivées partielles. »

Ceci l'amène d'abord à chercher à construire un vecteur aléatoire de matrice de covariances donnée. Il n'obtiendra la solution complète de ce problème qu'en 1958 ; elle sera publiée dans la partie B de *Kinematics of homogeneous turbulence* [153] avec une étude particulière du cas homogène complétée dans la partie D de cet article par l'étude du spectre d'énergie. Dans sa publication de 1956, il suit la voie introduite par M. Kac et A.J.F. Siegert dans le cas stationnaire pour $p=1$ et il utilise le développement en série de Mercer de la matrice Γ à l'aide des valeurs caractéristiques λ_n et de leurs vecteurs caractéristiques soit :

$$\Gamma_{jk}(x,y)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\varphi_{n,j}(x)\varphi_{n,k}(y) \quad \text{sur le compact} \quad I\times I\,.$$

Ceci le conduit à introduire l'espace de Hilbert H des suites $\{\xi_n\,;\,n\geq 1\}$ de nombres réels telles que

$$\sum_1^\infty \lambda_n\xi_n^2<+\infty\,.$$

Considérant le vecteur aléatoire $u(x,\omega)=\sum_1^\infty\sqrt{\lambda_n}\varphi_n(x)\xi_n(\omega)$, il le construit en se donnant une suite $\{\xi_n\,;\,n\geq 1\}$ de variables aléatoires réelles indépendantes, identiquement distribuées de loi définie par la donnée sur $\mathbb{R}$ d'une mesure de probabilité τ telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} \xi \, \mathrm{d}\tau(\xi) = 0 \,, \quad \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \, \mathrm{d}\tau(\xi) = 1 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \xi^4 \, \mathrm{d}\tau(\xi) = K \,\text{fini.}$$

L'application du critère de convergence presque sûre de Kolmogoroff à la suite de variables aléatoires réelles indépendantes

$$\eta_n = \lambda_n(\xi_n^2 - 1)$$

lui donne la solution du problème cherché.

Il note aussi que, par isométrie, il peut en déduire la construction d'une mesure de probabilité sur tout espace de Hilbert séparable. Dans sa lettre à Garrett Birkhoff du 8 mars 1956, il donnait aussi plusieurs exemples de construction de L-mesures de probabilité sur des espaces de Banach basés sur la même méthode.

Il considérait notamment le cas déjà évoqué par Fréchet de l'espace U des séries à termes réels convergentes :

$$\begin{aligned} u &= (u_1, u_2, \dots, u_n, \dots,) \quad \text{normé par :} \\ \|u\| &= \sup\{|u_1 + \cdots + u_n| \;;\; n \geq 1\},; \end{aligned}$$

il introduisait une suite $\{b_n \xi_n \;;\; n \geq 1\}$ de variables aléatoires réelles indépendantes centrées, telles que :

$$E(b_n^2 \xi_n^2) = b_n^2 \quad \text{et} \quad \sum_1^\infty b_n^2 \quad \text{converge}$$

d'où posant $u_n = b_n \xi_n$, il obtenait une L-mesure de probabilité sur l'espace U.

Se référant à l'article de Fréchet de 1924 (*Les éléments aléatoires* Paris 1924, p. 87–88), il envisageait aussi le cas de l'espace de Banach séparable Φ des fonctions entières :

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n \quad \text{telles que} \quad \lim_n |a_n|^{1/n} = 0$$

A cet effet, il introduisait l'espace Ω des suites aléatoires réelles :

$$\omega = \{\xi_0, \eta_0, \dots, \xi_n, \eta_n, \dots\}$$

où les variables $\dots \xi_n, \eta_n \dots$ étaient indépendantes, centrées, de variance 1.

Posant $\rho_n = \sqrt{\xi_n^2 + \eta_n^2}$ et introduisant une suite $\{b_n \;;\; n \geq 1\}$ de nombres positifs telle que $\lim_n b_n^{1/n} = 0$ il déduisait du critère de Kolmogoroff que l'ensemble

$$\{\omega \,;\, \sum_0^\infty b_n \rho^n r^n < +\infty \quad \text{pour tout} \quad r > 0\}$$

a pour probabilité 1 ce qui lui permettait de conclure en posant

$$a_n = b_n(\xi_n + i\eta_n) \,.$$

Mesures de probabilité sur un espace de Hilbert séparable et sur certains espaces L^p et ℓ^p.

Dès la parution aux Annales de l'Institut Henri Poincaré de la thèse de Mademoiselle Mourier *Eléments aléatoires à valeurs dans un espace de Banach* (13, 1953, p. 161–244), Joseph Kampé de Fériet en perçoit tout l'intérêt pour sa recherche de solutions aléatoires de certaines équations aux dérivées partielles linéaires. En effet, pour lui, l'aléatoire intervient par le biais des conditions initiales ; celles-ci s'introduisent sous la forme d'un espace fonctionnel de Banach ou de Fréchet à base dénombrable de Schauder, la solution de l'équation n'est alors autre qu'une forme linéaire continue sur cet espace donc mesurable si l'on se donne une L-mesure de probabilité sur l'espace fonctionnel envisagé.

Il fait déjà usage de la notion de L-mesure dans son exposé du 20 janvier 1956 déjà cité et dans une Note aux *Comptes rendus* du 2 janvier 1957 intitulée : *Un problème de probabilité conditionnelle pour les fonctionnelles linéaires dans un espace de Banach* [145].

A cette époque, il fait paraître une suite de publications consacrées à la construction de L-mesures.

La première d'entre elles est le fruit d'un exposé qu'il donne le 10 janvier 1957 à la Faculté des Sciences de Lille dans le cadre du séminaire sur les problèmes mathématiques de la physique théorique. Dans cet exposé intitulé *Construction de mesures dans certains espaces fonctionnels en vue des applications à la physique* [146] il rappelle les résultats qu'il avait exposés au séminaire Darmois du 20 janvier 1956 et en donne une extension aux espaces de Banach à base dénombrable de Schauder $\{e_n\,;\, n \geq 1\}$, chaque e_n ayant pour norme 1. Il réalise cette extension en introduisant d'abord une suite de variables aléatoires réelles $\{\xi_n\,;\, n \geq 1\}$ indépendantes centrées, de même loi, de variance 1 et telles que

$$E(|\xi_n|) = a$$

Il se donne aussi une suite $\{\lambda_n\,;\, n \geq 1\}$ de nombres positifs telle que la série de terme général λ_n converge et il applique le critère de Kolmogoroff à la suite $\eta_n = \lambda_n \xi_n$ ce qui lui permet de conclure.

En fait, comme il le remarquera ultérieurement, l'utilisation du critère de Kolmogoroff était superflue, la condition

$$\sum_{n=1}^{+\infty} E(|\eta_n|) < +\infty$$

lui permettant d'obtenir immédiatement le résultat cherché sans hypothèse d'indépendance.

Néanmoins, c'est le critère de Kolmogoroff qu'il utilise encore dans sa Note aux *Comptes rendus* du 25 février 1957 : *Une classe de mesures de probabilité sur les espaces ℓ^p et L^p* [147]. La méthode est la même que précédemment ; il construit une L mesure de probabilité μ sur l'espace de Hilbert ℓ^2 des suites $\{\xi_n\,;\, n \geq 1\}$ de nombres réels, telles que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 < +\infty\,.$$

Il construit μ comme le produit d'une suite $\{\tau_n\,;\,n \geq 1\}$ de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \xi^2 \,\mathrm{d}\tau_n(\xi) = a_n\,, \quad \int_{\mathbb{R}} \xi^4 \,\mathrm{d}\tau_n(\xi) = b_n\,,$$

avec

$$\sum_1^\infty a_n < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_1^\infty b_n < +\infty$$

et il obtient de nouveau le résultat comme application du critère de Kolmogoroff. Il l'étend ensuite en utilisant un résultat de S. Mazur (Studia Mathematica, 1, 1929, p. 83–85) qui établit l'homéomorphie existant pour tout $p \geq 1$ entre les espaces ℓ^p et $L^p(F)$ où F est un ensemble quelconque et m une mesure séparable sur cet espace ; utilisant le fait que l'homéomorphie conserve les L-mesures, il déduit le résultat de celui obtenu pour ℓ^2.

Dans sa publication suivante *Mesure de probabilité sur un espace de Hilbert séparable* [148] il remarque qu'il lui suffit de se donner sur une tribu de parties de $\mathbb{R}^\infty$ une mesure de probabilité μ rendant μ-mesurable chacune des coordonnées ξ_n d'un point quelconque x et telle que

$$\sum_{n=1}^\infty \int_{\mathbb{R}^\infty} \xi_n^2 \,\mathrm{d}\mu(x) < +\infty$$

Il signale aussi que l'existence d'une L-mesure de probabilité dans un espace de Hilbert séparable permet d'étendre à cet espace le critère de convergence forte presque sûre de Kolmogoroff pour une série somme d'éléments aléatoires indépendants à valeurs dans cet espace de Hilbert. Il donnera la démonstration de ce résultat en annexe à la partie D de *Kinematics of homogeneous turbulence* [167] qu'il publie avec Garrett Birkhoff en 1962.

Tous les résultats que l'on vient de citer étaient plus ou moins rattachés à l'espace de Hilbert ℓ^2 et, à l'exclusion du dernier, basés sur le critère de convergence presque sûre de Kolmogoroff. Désormais, il va prolonger son étude aux espaces de Banach à base dénombrable de Schauder et il étudiera en particulier le cas des espaces $C[0,1]$ et $C_0[0,1]$.

Mesures de probabilité sur un espace de Banach à base dénombrable de Schauder

Joseph Kampé de Fériet y consacre deux publications [149] et [162], l'une parue aux *Comptes rendus* le 13 mai 1957, l'autre, déposée au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées le 29 juin 1958, parue en 1960. Dans chacune d'elles, il rappelle d'abord la notion d'espace de Banach $\mathcal{X}$ à base dénombrable introduite par J. Schauder en 1927 (Math. Z., 26, 1927, p. 47–65) comme suit : $\mathcal{X}$ admet une base dénombrable s'il existe une suite $e_n \in \mathcal{X}$ et une transformation biunivoque $y = Tx, x = T^{-1}y, x \in \mathcal{X}$, $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \ldots) \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^\infty$, telle que, pour tout $x \in \mathcal{X}$:

$$\lim_n \|x - \sum_1^n \eta_k e_k\| = 0$$

Il note que toute fonctionnelle linéaire $x^*(x)$, $x^* \in \mathcal{X}^*$ (dual topologique de $\mathcal{X}$) est alors représentée par la série convergente pour tout $x \in \mathcal{X}$

$$x^*(x) = \sum_1^\infty \eta_n x^*(e_n)$$

Dès sa première Note, il remarque que l'ensemble des suites sommables est contenu dans $\mathcal{Y}$

$$\ell = \{y\,;\, \sum_1^\infty |\eta_n| < +\infty\} \subset \mathcal{Y}$$

Désignant par $\mathcal{X}_0$ la partie de $\mathcal{X}$ image biunivoque de ℓ par T^{-1}, il en déduit que la donnée d'une L-mesure de probabilité ν sur ℓ permet de construire une L-mesure de probabilité sur $\mathcal{X}_0$ puis sur $\mathcal{X}$. Il signale que tel est le cas si l'on se donne une mesure ν de probabilité sur une tribu $\mathcal{G}$ de parties de $\mathbb{R}^\infty$ rendant mesurable chacune des coordonnées η_n de tout point y de $\mathbb{R}^\infty$ et vérifiant de plus la condition :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^\infty} |\eta_n(y)| \,\mathrm{d}\nu(y) < +\infty\,.$$

Dans son second article, il généralise ses résultats ; il note Ω l'ensemble des points $\omega = \{\eta_n \ldots \eta_n \ldots\}$ de $\mathbb{R}^\infty$ en bijection avec l'espace de Banach $\mathcal{X}$ à base dénombrable par :

$$x = U\omega\,, \quad \omega = U^{-1}x\,, \quad x \in \mathcal{X}\,, \omega \in \Omega \subset \mathbb{R}^\infty\,.$$

Il caractérise Ω à l'aide de la norme de $\mathcal{X}$ puis les L-mesures de probabilité sur Ω qu'il construit à partir d'une suite $\{\nu_n\,;\, n \geq 1\}$ où chaque ν_n est une probabilité sur $\mathbb{R}^n$; il énonce une condition nécessaire et suffisante garantissant l'existence d'une L-mesure sur Ω donc sur $\mathcal{X}$ et retrouve comme cas particulier la condition suffisante énoncée précédemment

$$\sum_1^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\eta_n| \,\mathrm{d}\nu_n < +\infty\,.$$

Il énonce ensuite des conditions nécessaires et suffisantes puis des conditions suffisantes d'existence de la moyenne $E(x)$ en tant qu'élément de $\mathcal{X}$ dont en particulier la condition suffisante suivante (cf. p. 136, corollaire 5.2)

« $E(x)$ existe si :

a) $E(\eta_n)$ existe pour chaque entier $n \geq 1$

b) $\sum_1^\infty [E(|\eta_n|^r]^{1/r} < +\infty$ pour un $r \geq 1$. »

Après avoir donné une application au cas des espaces ℓ^p, il passe au cas de l'espace de Banach $C[0,1]$ et étudie le cas particulier de la fonction aléatoire du mouvement brownien retrouvant et généralisant certains de ses résultats antérieurs.

Ce sont les travaux qu'il a consacrés aux mesures de probabilité sur les espaces de Banach $C[0,1]$ et $C_0[0,1]$ qui vont être examinés.

Comme on le verra plus loin, il généralisera cette étude en donnant une construction de mesures de probabilité sur certains espaces de Fréchet à base dénombrable de Schauder.

Mesures de probabilité sur les espaces de Banach $C[0,1]$ et $C_0[0,1]$. Fonction aléatoire du mouvement brownien.

Afin de définir des mesures de probabilité sur l'espace de Banach $C[0,1]$, Joseph Kampé de Fériet se ramène d'abord au sous-espace $C_0[0,1]$ des fonctions continues sur $[0,1]$, nulles en 0 et 1, un élément X de $C[0,1]$ étant remplacé par $x \in C_0[0,1]$ en posant $X(t) = \eta'(1-t) + \eta'' t + x(t)$, $\eta' = X(0)$, $\eta'' = X(1)$ et $\|x\| = \sup\{|x(t)|\ ;\ t \in [0,1]\}$.

Il rappelle ensuite la définition de la base de Schauder de $C_0[0,1]$ qu'il note $\{e_n(t)\ ;\ n \geq 1\}$ en adoptant les notations suivantes.

Pour chaque entier $q \geq 1$; $N_q = \{n\ ;\ n$ entier et $2^{q-1} \leq n < 2^q\}$.

A chaque entier $n \geq 1$ correspond bijectivement un couple (q_n, p_n) d'entiers tels que $n = 2^{q_n - 1} + p_n$ où $0 \leq p_n < 2^{q_n - 1}$ et $q_n \geq 1$.

Il définit ensuite le n-ième point dyadique t_n par $t_n = (2p_n + 1)2^{-q_n}$ et le n-ième intervalle J_n par $J_n = \left[p_n 2^{1-q_n}, (p_n+1)2^{1-q_n}\right[$ puis la n-ième fonction de Schauder $e_n(t)$ par :

$$e_n(t) = \begin{cases} 2^{q_n}(t - p_n 2^{1-q_n}) & \text{sur} \quad J_{2n}, \\ 2^{q_n}\big((p_n+1)2^{1-q_n} - t\big) & \text{sur} \quad J_{2n+1}, \\ 0 & \text{à l'extérieur de} \quad J_n. \end{cases}$$

Dès lors, pour chaque fonction x appartenant à $C_0[0,1]$, la suite de fonctions polygonales $x_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j(t)$ converge uniformément vers $x(t)$ sur $[0,1]$ en posant pour chaque entier $n \geq 1$,

$$\eta_n = x\left(\frac{2p_n + 1}{2^{q_n}}\right) - \frac{1}{2}\left[x\left(\frac{p_n}{2^{q_n - 1}}\right) + x\left(\frac{p_n + 1}{2^{q_n - 1}}\right)\right]$$

(ce qui revient à faire coïncider la ligne polygonale x_n avec x aux points dyadiques $t_1, t_2, \ldots, t_n$) ; il rappelle que ce résultat avait déjà été établi par Schauder et qu'il découle de la continuité uniforme de x sur l'ensemble dyadique.

Dans sa Note aux *Comptes rendus* du 13 mai 1957 déjà citée [149], il supposait que la suite $\{\eta_n\ ;\ n \geq 1\}$ vérifiait la condition qu'il avait déjà énoncée pour chaque espace de Banach à base dénombrable

$$\sum_{n=1}^{+\infty} E\Big(|\eta_n|\Big) < +\infty$$

et il en déduisait le théorème suivant (cf. ses notations antérieures).

« L'image $\mathcal{X}_0$ de ℓ par la transformation T^{-1} est l'ensemble de toutes les fonctions continues et à variation bornée sur $[0,1]$ telles que $x_n(t)$ converge en variation vers x » d'où le résultat général suivant qui conclut sa Note.

« Si η', η'', $\eta_1 \dots \eta_n \dots$ sont des variables aléatoires telles que

$$\sum_1^\infty E\Big(|\eta_n|\Big) < +\infty\,,$$

la fonction aléatoire

$$x(t) = \eta'(1-t) + \eta'' t + \sum_1^\infty \eta_n e_n(t)$$

est presque sûrement une fonction continue à variation bornée ; pour presque tout échantillon la suite

$$x_n(t) = \eta'(1-t) + \eta'' t + \sum_1^n \eta_k e_k(t)$$

converge en variation vers $x(t)$. »

Ces résultats ne lui permettaient toutefois pas de retrouver comme cas particulier la fonction aléatoire du mouvement brownien, celle-ci étant presque sûrement à variation non bornée. Ceci l'amena à affiner sa méthode dans une Note aux *Comptes rendus* du 19 août 1957, *Mesures de probabilité sur l'espace de Banach* $C[0,1]$ [151]. Il remarque d'abord que pour $n \in N_q$, une seule des fonctions $e_n(t)$ (qui constituent la base de Schauder de $C_0[0,1]$) est non nulle et que la condition

$$\sum_{q=1}^\infty \sup_{n\in N_q} |\eta_n| < +\infty$$

suffit pour garantir la convergence absolue et uniforme de la série de Schauder sur $[0,1]$. Dès lors, il en déduit que si $\eta_1,\ \eta_2, \dots, \eta_n \dots$ désigne une suite de variables aléatoires réelles, la condition

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \left[E\Big(\sup_{n\in N_q} |\eta_n|^r\Big)\right]^{1/r} < +\infty \quad \text{pour un} \quad r \geq 1$$

entraîne presque sûrement la convergence absolue et uniforme de la série de Schauder sur $[0,1]$. Il signale que cette condition est en particulier vérifiée lorsque la suite $\{\eta_n\,;\, n \geq 1\}$ est une suite de variables aléatoires normales centrées telle que pour tout $n \in N_q$, $E(\eta_n^2) = \sigma_q^2$ et $\sum_{q=1}^{+\infty} 2^{q/r}\sigma_q < +\infty$ puis que cette dernière condition est toujours vérifiée si pour chaque $q \geq 1$,

$$\sigma_q^2 = 2^{-\alpha q}\sigma^2\,, \quad \alpha > 0\,.$$

Lorsque la suite $\{\eta_n \ \ n \geq 1\}$ est une suite de variables aléatoires normales centrées indépendantes, telle que : pour chaque entier $n \in N_q$, $E(\eta_n^2) = 2^{-2q}$, il vérifie qu'il obtient ainsi le pont brownien $B(t)$ de covariance

$$E(B(t)B(s)) = \inf(t(1-s), s(1-t)), \quad t \text{ et } s \in [0,1]$$

la fonction aléatoire du mouvement brownien s'en déduisant par $W(t) = tW(1) + B(t)$, $W(1)$ étant une variable aléatoire normale réduite indépendante de la suite $\{\eta_n\,;\, n \geq 1\}$.

Cette construction de la fonction aléatoire du mouvement brownien est en fait une explicitation à l'aide de la base de Schauder du résultat énoncé en 1948 par Paul Lévy dans *Processus stochastiques et mouvement brownien* (p. 15 à 20) pour établir la continuité du processus de Wiener ; elle fut également introduite dans l'article de Z. Ciesielski *Hölder condition for realizations of Gaussian processes* (Transactions of the American Mathematical Society, June 1961, vol. 99, n° 3, p. 403–413 et spécialement p. 406–407).

La plupart des auteurs attribuent d'ailleurs cette construction à Z. Ciesielski bien que la publication de Joseph Kampé de Fériet semble peut-être lui être antérieure. Tous deux mettent en évidence le lien entre la base de Schauder de $C[0,1]$ et la base orthonormale de Haar de $L^2[0,1]$ et le résultat qu'ils obtiennent ainsi peut être généralisé comme suit (cf. L.A. Shepp, *Radon-Nikodym derivatives of Gaussian measures* Annals of Mathematical Statistics, vol. 37, n° 2, April 1966, p. 321–354, spécialement p. 324–326) :

« *S*oit $\{\eta_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires normales indépendantes centrées, de variance 1 et une base orthonormée arbitraire de $L^2[0,T]$ notée $\varphi_n(t)$; soit $\Phi_j(t) = \int_0^t \varphi_j(u)\,\mathrm{d}u$, $0 \leq t \leq T$.

« Alors pour chaque t tel que $0 \leq t \leq T$, la série $\sum_1^\infty \eta_j \Phi_j(t)$ est une réalisation du processus de Wiener sur $[0,T]$. »

C'est exactement le résultat qu'obtiennent J. Kampé de Fériet et Z. Ciesielski sur $[0,1]$ en utilisant la base orthonormale de Haar, la convergence uniforme presque sûre du développement en série donné par L.A. Shepp étant une conséquence directe d'un résultat ultérieur classique d'Itô et Nisio (K. Itô, M. Nisio *On the convergence of sums of independent Banach space valued random variables* Osaka Math. J., 5, 35–48 (1968)).

Les résultats ainsi obtenus par Joseph Kampé de Fériet furent repris dans son exposé au séminaire Darmois du 12 juin 1958 (*Mesures de probabilité sur l'espace* $C[0,1]$ [156]) dans une Note aux *Comptes rendus* [157] du 23 juin 1958 et dans l'exposé de synthèse de 1960 déjà cité [162].

Dans une Note ultérieure aux *Comptes rendus* [181] du 5 novembre 1962, il donnera des conditions nécessaires et suffisantes de convergence uniforme presque sûre de la série de Schauder, complétant ainsi ses résultats antérieurs.

De novembre 1960 à mars 1961, il effectue un premier séjour aux Indes ; il y donne une série de leçons dans plusieurs universités (Chandigarh, Bénarès, ...) ; l'une d'elles eut lieu à l'Indian Statistical Institute of Calcutta ; rédigée par K.R. Parthasarathy, R. Ranga Rao et S.R.S. Varadhan, elle parut en 1961 dans « The Indian journal of statistics » sous le titre : *An elementary theory of the Brownian motion random function* [174]. Outre l'exposé des résultats précédents, on y trouve une extension de la fonction aléatoire du mouvement brownien à $[0,\infty[$ sous la forme de la série :

$$\sum_{j=1}^{+\infty} W_j(t) \quad \text{où pour} \quad j=1,2,\ldots$$

$$W_j(t)=\xi_j e_0(t-j+1)+\sum_{n=1}^{+\infty}\eta_{j,n}e_n(t-j+1)\,,$$

où $e_0(t)=0$, t ou 1 selon que $t<0$, $0\leq t\leq 1$ et $t>1$, $e_n(t)$ est le n-ième élément de la base de Schauder de $C_0[0,1]$, $\xi_1,\xi_2,\ldots$, $\eta_{j,1}\ldots\eta_{j,n}\ldots$ sont des variables aléatoires normales centrées indépendantes avec $E(\xi_j^2)=\sigma^2$, $E(\xi_{j,n}^2)=\sigma^2 2^{-q_n-1}$ (où $q_n=[\log_2 n]+1$).

On y trouve aussi une démonstration très élémentaire du fait que $W(t)$ est presque sûrement à variation non bornée et une présentation des intégrales $\int_{[0,\infty[} f(t)\,\mathrm{d}W(t)$ où $f\in L^2[0,\infty[$ qu'il qualifiera de « pseudo intégrales de Stieltjes aléatoires » et auxquelles il consacra plusieurs publications de 1960 à 1962.

Pseudo intégrales de Stieltjes aléatoires

La première mention de ce thème apparaît dans la communication qu'il présente en juin 1960 à une conférence internationale sur les équations aux dérivées partielles à l'Université de Wisconsin à Madison ; dans cet exposé qu'il intitule *Statistical fluid mechanics : two dimensional linear gravity waves* [165], exposé analysé plus loin ; en vue d'obtenir des intégrales aléatoires du système d'équations :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\,,$$

il est amené à considérer des intégrales de la forme

$$\int_0^{+\infty}\exp(-\lambda y)\cos(\lambda x)\cos(t\sqrt{\lambda})g(\lambda)\,\mathrm{d}W(\lambda)$$

Il définit l'intégrale $\int_0^\infty f(\lambda)\,\mathrm{d}W(\lambda)$ par une intégration par parties en supposant f absolument continue sur chaque intervalle $[0,a]$, telle que $f(\lambda)=0(\lambda^{-\alpha})$ avec $\alpha>\frac{1}{2}$ si $\lambda\to+\infty$ et $\lambda^\alpha f(\lambda)\in L^2[0,+\infty[$, $W(\lambda)$ désignant évidemment la fonction aléatoire du mouvement brownien.

Ce sont ces restrictions qu'il va lever dans deux Notes aux *Comptes rendus* des 10 avril et 29 mai 1961 : *Pseudo intégrales de Stieltjes aléatoires* (publications [170] et [173]), dans les leçons qu'il donne en décembre 1960 à l'Indian Institute of Technology à Kharagpur, parues aux Annali di Matematica en 1962 (publication [179]) et dans celles données à Calcutta déjà citées.

Il rappelle d'abord l'interprétation courante de la pseudo intégrale de Stieltjes (cf. par exemple J.L. Doob « Stochastic processes » p. 426–427) : pour une fonction en escalier :

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \sum_{j=1}^{n} c_j 1_{[a_j,b_j[} \\ \int_{[0,\infty[} F_n(t)\,\mathrm{d}W(t) &= \sum_{1}^{n} c_j(W(b_j)-W(a_j)) \end{aligned}$$

l'intégrale $\int_{[0,\infty[} F(t)\,\mathrm{d}W(t)$ étant définie ensuite pour chaque fonction F de carré intégrable sur $[0,\infty[$ comme limite en moyenne quadratique d'intégrales obtenues pour des fonctions en escalier. Ce procédé lui paraît insuffisant pour mettre clairement en évidence certaines propriétés presque sûres (continuité, dérivabilité, ...) d'intégrales de la forme

$$u(x,y,t) = \int_0^\infty F(x,y,t,\lambda)\,\mathrm{d}W(\lambda)\,.$$

Il propose une représentation de l'intégrale $\int_0^\infty F(t)\,\mathrm{d}W(t)$ (pour F appartenant à $L^2[0,\infty[$) au moyen d'une série presque sûrement convergente : $\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{q_n+1/2}F_{m,n}\eta_{m,n}$ où $q_n = [\log_2 n]+1$

$$\begin{aligned} F_{m,n} &= \int_{m-1}^{m} F(t)h_n(t-m+1)\,\mathrm{d}t \\ \eta_{m,0} &= W(m)-W(m-1) \\ \eta_{m,n} &= W\left(m-1+\frac{2p_n+1}{2^{q_n}}\right) - \frac{1}{2}\left[\left(W(m-1+\frac{p_n}{2^{q_n-1}}\right)\right. \\ &\qquad \left. +W\left(m-1+\frac{p_n+1}{2^{q_n-1}}\right)\right] \end{aligned}$$

$p_n = n-2^{q_n-1}$ et les h_n pour $n \geq 0$ définissent la base orthonormale de Haar de $L^2[0,1]$.

L'utilisation du critère de convergence presque sûre de Kolmogoroff lui permet d'établir que cette série converge presque sûrement et que sa somme est une variable aléatoire normale centrée de variance $\int_0^\infty F^2(t)\,\mathrm{d}t$.

Dans sa Note du 29 mai 1961, il remarque qu'il obtient ainsi un isomorphisme isométrique entre l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2[0,+\infty[$ et l'espace de Hilbert $\mathcal{G}$ des variables aléatoires gaussiennes centrées $\int_0^\infty F(t)\,\mathrm{d}W(t)$.

Il signale aussi que dans sa démonstration on peut remplacer la base orthonormale de Haar par une base orthonormale quelconque de $L^2[0,\infty[$; et il établit en outre que si F appartient à $L^2[0,\infty[$ et si elle est absolument continue, alors

$$\int_0^\infty F(t)\,\mathrm{d}W(t) = \lim_{N\to\infty}\left[F(N)W(N) - \int_0^N F'(t)W(t)\,\mathrm{d}t\right],$$

cette limite existant presque sûrement ; si de plus, $F(t) = o((t\log\log t)^{-1/2})$ lorsque $t \to +\infty$, il remarque qu'en vertu de la loi du logarithme itéré l'intégrale se ramène à la limite presque sûre

$$-\lim_{N\to\infty}\int_0^N F'(t)W(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

déjà envisagée dans son exposé de Madison en 1960.

Dans la partie D de *Kinematics of Homogeneous Turbulence* [167] parue en 1962, Joseph Kampé de Fériet et Garrett Birkhoff donneront une généralisation de ce résultat formulée en termes de convergence en moyenne quadratique. Ils construisent des intégrales de la forme

$$u(x,\omega)=\int_{\mathbb{R}^p} c(x-y)W(\,\mathrm{d}y,\omega)\,,$$

qu'ils qualifieront de convolutions généralisées ou moyennes mobiles.

La fonction W qu'ils introduisent n'est autre qu'une généralisation à $\mathbb{R}^p$ du processus de Wiener, le processus de Wiener-Chentsov ou drap brownien (cf. N.N. Chentsov : *Wiener random fields of several parameters* Dokl. Akad. Nauk. SSSR, vol. 106, 607–609 et *Levy Brownian motion for several parameters and generalized white noise* Teor. Veroyatn. i. Primenen, 1957, vol. 2, 281–282, cité par Paul Lévy dans *Processus stochastiques et mouvement brownien* p. 341–342).

Mesures de probabilité sur certains espaces de Fréchet et autres résultats relatifs à la fonction aléatoire du mouvement brownien

Joseph Kampé de Fériet a été amené à plusieurs reprises à étendre au cas de certains espaces de Fréchet les recherches entreprises pour la construction de mesures de probabilité sur les espaces de Banach à base de Schauder ; sa motivation est exposée dans plusieurs travaux notamment dans *Kinematics of Homogeneous Turbulence* ; il y indique que la notion de fonction de carré intégrable sur $\mathbb{R}^p$ est trop restrictive et qu'il y a lieu d'y substituer celle de fonction de carré intégrable sur tout compact.

Dans une Note aux *Comptes rendus* du 29 mai 1967 *Mesures de probabilité sur les espaces de Fréchet à base de Schauder, application à la fonction du mouvement brownien* [190], il transpose ses résultats antérieurs en se donnant un espace de Fréchet dont la topologie est définie par la suite dénombrable de semi-normes $\{\|x\|_m\,;\, m\geq 1\}$ et en y étendant la définition d'une base de Schauder.

Il en déduit que si on se donne une suite $\{\eta_n\,;\, n\geq 1\}$ de variables aléatoires réelles telle que pour tout $m\geq 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} E(|\eta_n|)\|e_n\|_m < +\infty\,,$$

alors pour presque tout choix de la suite $\{\eta_1,\ldots,\eta_n,\ldots\}$ la suite $x_n=\eta_1 e_1\cdots+\eta_n e_n$ converge fortement vers un élément de l'espace $\mathcal{X}$.

Il applique ceci en utilisant la base de Schauder $e_n(t)$ de $C_0[0,1]$ qu'il complète en y adjoignant $e_0(t)=\inf(t,1)$, $e_0'(t)=\frac{1}{2}(1-t+|1-t|)$ et pour tout entier $n\geq 1$, $e_n'(t)=te_n(1/t)$.

Il montre que l'on obtient ainsi une base de Schauder pour les espaces de Banach $C[0,+\infty]$, $C_\alpha[0,\infty]$ (où $\alpha > 0$ espace des fonctions continues sur $[0,\infty[$, telles que $\lim_{t\to+\infty} \frac{x(t)}{t^\alpha} = 0$) et l'espace de Fréchet des fonctions continues sur $[0,\infty[$ qu'il note $\Gamma[0,+\infty[$. En considérant la série

$$\eta_0 e_0(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} (\eta_n e_n(t) + \eta'_n e'_n(t))$$

lorsque les variables aléatoires $\eta_0, \eta_1, \eta'_1 \ldots \eta_n, \eta'_n$, sont indépendantes, normales, centrées, telles que :

$$E(\eta_0^2) = 1 \quad \text{et} \quad E(\eta_n^2) = E(\eta_n'^2) = \frac{1}{2^{q_n+1}} \quad (\text{où} \quad q_n = [\log_2 n] + 1)$$

il obtient le résultat suivant.

« La somme de la série

$$W(t,\omega) = \eta_0 e_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n e_n(t) + \eta'_n e'_n(t)$$

définit sur $[0,+\infty[$ une représentation de la fonction aléatoire du mouvement brownien, représentée par la somme d'une série presque sûrement absolument et uniformément convergente (sur tout intervalle borné), appartenant à $C_\alpha[0,+\infty]$ pour tout $\alpha > 1/2$. »

En outre, la représentation qu'il obtient met bien en évidence le fait que $W(t)$ et $tW(1/t)$ sont deux versions du mouvement brownien ; on passe de l'une à l'autre en posant $W(t,\omega) = tW\big(1/t, \varphi(\omega)\big)$ où $\omega = (\eta_0, \eta_1, \eta'_1, \ldots, \eta_n, \eta'_n \ldots)$ et $\varphi(\omega) = (\eta_0, \eta'_1, \eta_1, \ldots, \eta'_n, \eta_n \ldots)$. Ceci se rattache à un résultat antérieur obtenu dans une Note aux *Comptes Rendus* du 19 décembre 1966 *Une propriété caractéristique de la fonction aléatoire du mouvement brownien* [188] qu'il énonce comme suit :

« Si $\mathcal{K}$ est la classe des fonctions définies sur $T = [0,+\infty[$, non négatives, non décroissantes, une covariance $\Gamma(t,s)$ définie sur $T \times T$ vérifie

$$\Gamma(\theta_1(t) + \theta_2(t), \theta_1(s) + \theta_2(s)) = \Gamma(\theta_1(t) + \theta_1(s)) + \Gamma(\theta_2(t), \theta_2(s))$$

pour tous θ_1 et θ_2 appartenent à $\mathcal{K}$ si et seulement si

$$\Gamma(t,s) = \Gamma(1,1)\,\mathrm{Inf}(t,s)\ , \qquad \text{»}$$

d'où une caractérisation de la fonction de Wiener qui contient l'indépendance des accroissements. Ce résultat était déjà partiellement énoncé dans une communication qu'il présenta en août 1966 au congrès international de mathématiques à Moscou *Sur quelques propriétés de la fonction de Wiener-Lévy* [187]. Le 17 août 1966, il obtient un autre résultat basé sur la propriété d'ergodicité du processus d'Ornstein-Uhlenbeck : $U(t,\omega) = \mathrm{e}^{-t} W(\mathrm{e}^{2t},\omega)$, processus gaussien stationnaire centré de covariance $\exp(-|t-s|)$. Il ne le publiera qu'en 1972 dans la revue indienne *The statistical student* où il paraîtra sous le titre :

An ergodic property of the Brownian motion [218].

Parmi les résultats obtenus figure le suivant :

Etant donnés $C_1 > 0, C_2 > 0 \ldots C_n > 0$, $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ borélienne, alors pour presque tout ω,

$$\lim_{T\uparrow+\infty} \frac{1}{\log T} \int_0^T F\Big(\frac{W(C_1t,\omega)}{\sqrt{C_1t}}, \ldots, \frac{W(C_nt,\omega)}{\sqrt{C_nt}}\Big) \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

est égale à

$$E\bigg(F\Big(\frac{W(C_1t,\omega)}{\sqrt{C_1t}}, \ldots, \frac{W(C_nt,\omega)}{\sqrt{C_nt}}\Big)\bigg)$$

d'où en particulier pour presque tout échantillon du mouvement brownien, en posant : $A([a,b],\omega) = \{t\,; a \le t^{-1/2}W(t,\omega) \le b\}$ et pour tout sous-ensemble E Lebesgue mesurable de $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \int_E \frac{dt}{t} \\ \lim_{T\uparrow+\infty,\,\varepsilon\downarrow 0} \frac{\mu\big(A\big([a,b],\omega\big)\cap[\varepsilon,T]\big)}{\mu(\varepsilon,T)} &= \frac{1}{2}\big(\mathrm{erf}\big(\frac{b}{\sqrt{2}}\big) - \mathrm{erf}\big(\frac{a}{\sqrt{2}}\big)\big) \end{aligned}$$

Pour être complet sur le sujet, il convient d'indiquer qu'en 1965 et 1969, à la demande d'Eugen Lukacs, il avait donné un cycle de cours à la Catholic University of Washington, cycle consacré à la fonction de Wiener et à la représentation d'intégrales aléatoires de certaines équations aux dérivées partielles. A la demande d'Eugen Lukacs, il entreprit la rédaction d'un ouvrage consacré à ces sujets mais ne put la mener à bien absorbé par d'autres travaux de recherche dont la préparation du mémoire *Statistically well-set Cauchy problems* qu'il publiera en 1972 avec Garrett Birkhoff et Jerry Bona, les enseignements de synthèse consacrés aux systèmes évolutifs aléatoires qu'il donnera à Marseille et à l'élaboration d'une théorie généralisée de l'Information qu'il entreprendra à partir de 1967.

4.4 Travaux consacrés aux fonctions aléatoires stationnaires, à l'analyse harmonique généralisée. Tenseur spectral de la turbulence homogène. Cas gaussien. *Kinematics of Homogeneous Turbulence*

Le mémoire que Joseph Kampé de Fériet publia en 1939 aux Annales de la Société Scientifique de Bruxelles s'intitulait :

Les fonctions aléatoires stationnaires et la théorie de la turbulence homogène [69]

Dès l'introduction, il en exposait clairement l'objectif : obtenir une justification mathématique rigoureuse de l'identification des moyennes expérimentales temporelles ou spatiales et des moyennes statistiques, identification utilisée par la plupart de ses devanciers qui procédaient à des calculs sur une seule trajectoire. Ceci revenait à supposer l'existence d'un principe ergodique. Il le soulignera à maintes reprises notamment dans la conférence qu'il donna à Milan en 1956 *La notion de moyenne dans la théorie de la turbulence homogène* [142] et dans *Problèmes mathématiques de la turbulence homogène* [154]. Comme on le verra plus loin, c'était aussi un des objectifs qu'il s'assignait en tentant d'élaborer une Mécanique statistique des milieux continus bien que, dès le départ la validité de cette hypothèse d'ergodicité lui parut toujours douteuse pour les solutions aléatoires des équations de Navier-Stokes, tout au moins pour les moyennes temporelles. Il fut donc amené très logiquement à s'intéresser très vite aux fonctions aléatoires stationnaires et plus généralement aux processus possédant l'homogénéité spatiale.

Comme on l'a déjà vu, dès 1947–1948, il consacra plusieurs mémoires à la représentation des fonctions aléatoires en étudiant le cas particulier des processus strictement stationnaires et de la stationnarité d'ordre deux en utilisant la décomposition spectrale d'un groupe d'opérateurs unitaires.

En vue de prolonger et de généraliser les travaux que G.I. Taylor et Th. von Karman avaient respectivement consacrés au spectre d'énergie et au tenseur de corrélation, il introduisit la notion de tenseur spectral de la turbulence homogène tout en donnant une présentation originale de l'analyse harmonique généralisée due à Norbert Wiener.

S'ensuivit toute une série de travaux qui vont de 1945 à 1965 ; on y trouvera jointe une contribution originale, la notion de fonction aléatoire asymptotiquement stationnaire.

L'aboutissement ultime de ces travaux sera la publication déjà citée *Kinematics of Homogeneous Turbulence* qui constitue pour lui comme il le note une synthèse de travaux portant sur une trentaine d'années ; on y trouve d'importants développements consacrés aux champs de vecteurs aléatoires homogènes c'est-à-dire possédant la stationnarité spatiale.

Travaux consacrés à l'analyse harmonique généralisée au sens de Norbert Wiener

Wiener avait noté que, dans beaucoup d'applications, la transformée de Fourier des fonctions de carré intégrable (par rapport à la mesure de Lebesgue) supposait que l'énergie totale des systèmes physiques envisagés était finie. Or, on l'a déjà vu, à maintes reprises Joseph Kampé de Fériet revint sur ce point, dans les applications et notamment en Mécanique des Fluides, on est amené à considérer des systèmes physiques d'énergie totale infinie mais finie dans tout domaine borné de l'espace des temps ou plus généralement de $\mathbb{R}^k$.

Il perçut donc toute l'importance que revêtait pour ses recherches personnelles l'analyse harmonique généralisée que Wiener avait introduite en 1930 dans *Generalized harmonic analysis* (Acta Mathematica, t. 5, p. 117–258) et reprise en 1933 dans *The Fourier integral and certain of its applications* (ch. IV, p. 150–199).

Wiener avait introduit la classe $\mathcal{S}$ de fonctions f de carré intégrable sur tout intervalle compact telles que

$$\rho(h \mid f) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t+h)\overline{f(t)}\,\mathrm{d}t$$

existe pour tout h réel et il dénommait cette fonction ρ « autocorrélation de f », notant $\mathcal{S}'$ la classe des fonctions f appartenant à $\mathcal{S}$ et dont l'autocorrélation était fonction continue de h. Il avait établi que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{S}'$, ρ était transformée de Fourier- Stieltjes d'une fonction S à valeurs croissantes telle que pour tout h

$$\rho(h \mid f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ih\lambda)\,\mathrm{d}S(\lambda)\,;$$

S est alors dite périodogramme ou fonction spectrale de f.

C'est à la classe $\mathcal{S}'$ (qu'il notera $\mathcal{S}$ d'ailleurs) que Joseph Kampé de Fériet va consacrer ses recherches. Il voit immédiatement le lien entre cette notion et celle de corrélation spatiale ou temporelle introduite dans les travaux qu'il avait consacrés en 1948–1949 à la turbulence homogène.

Cependant la méthode d'introduction des notions de corrélation et de spectre par Wiener lui paraît très éloignée de la démarche du physicien car elle ne fait appel qu'aux grandes valeurs de t inaccessibles à la mesure. Il expose donc une méthode originale qui lui paraît mieux convenir et il la présente d'abord à Harvard en septembre 1950 dans une brève communication qu'il donne au congrès international des mathématiciens *Sur l'analyse harmonique des fonctions à carré moyen fini* [107] ; il l'avait toutefois développée auparavant en détail dans un exposé donné au Colloque international de Mécanique des Fluides à Poitiers en mai 1950 : *Sur l'analyse spectrale d'une fonction stationnaire en moyenne* [105].

La méthode qu'il propose est la suivante : il part de la fonction tronquée $f_T(t)$ égale à $f(t)$ sur l'intervalle $[-T, +T]$, nulle en dehors de cet intervalle, f étant supposée de carré intégrable sur tout intervalle fini.

Posant $\alpha_T(\omega) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} \exp(-i\omega t) f(t)\,\mathrm{d}t$, fonction entière de ω, de carré intégrable, il note $\rho_T(h)$ l'intégrale $\rho_T(h) = \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t+h)\overline{f_T(t)}\,\mathrm{d}t$ qu'il appelle cœfficient de corrélation de f_T, fonction continue et définie positive de h, transformée de Fourier - Stieltjes de la fonction monotone non décroissante $S_T(\omega)$ dite fonction spectrale de f_T et définie par

$$S_T(\omega) = \frac{T}{\pi} \int_{-\infty}^{\omega} |\alpha_T(\lambda)|^2\,\mathrm{d}\lambda\,,$$

f étant supposée appartenir à la classe $\mathcal{S}$ (c'est-à-dire à la classe $\mathcal{S}'$ selon Norbert Wiener) il établit que pour tout h réel, l'autocorrélation de f au sens de Wiener $\rho(h \mid f)$ notée $\rho(h)$ n'est autre que $\lim_{T\to\infty} \rho_T(h)$; il utilise pour ceci un lemme de Wiener qu'il rétablit au passage.

Des résultats dûs à Paul Lévy et Harald Cramér sur la convergence en loi établie à l'aide des fonctions caractéristiques lui permettent d'écrire

$$\rho(h) = \rho(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega h)\, \mathrm{d}\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega h)\, \mathrm{d}S(\omega)$$

la fonction spectrale ou périodogramme valant $\rho(o)\ \mathcal{F}(\omega)$.

A l'aide d'une formule classique dûe à Paul Lévy, il en déduit que l'énergie $S(\mu) - S(\lambda)$ comprise entre les points λ et μ $(\lambda < \mu)$, points de continuité de S, vaut :

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{H \to +\infty} \int_{-H}^{+H} \frac{1}{ih} \{\exp(-i\lambda h) - \exp(-i\mu h)\} \rho(h)\, \mathrm{d}h$$

et que le spectre S est continu (spectre de bande) si et seulement si

$$\lim_{H \to \infty} \frac{1}{2H} \int_{-H}^{+H} |\rho(h)|^2\ \mathrm{d}h = 0\,.$$

Considérant le cœfficient de Fourier de f, $a(\omega)$ défini d'après Norbert Wiener et Aurel Wintner par :

$$a(\omega) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \exp(-i\omega t) f(t)\, \mathrm{d}t = \lim_{T \to \infty} \alpha_T(\omega)$$

pour toutes les valeurs de ω pour lesquelles cette limite existe, il établit que, si tel est le cas, alors pour tout s réel,

$$a(\omega) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+s}^{T+s} \exp(-i\omega t) f(t)\, \mathrm{d}t$$

et il redémontre ensuite très simplement l'inégalité de Wiener - Wintner

$$|a(\omega)|^2 \leq S(\omega + 0) - S(\omega)$$

en tout point ω où a existe.

En supposant l'intégrabilité de la corrélation ρ, il rétablit aussi l'existence d'une dérivée continue pour S, donnée par l'expression bien connue :

$$S'(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega h) \rho(h)\, \mathrm{d}h$$

il note que dans ce cas le cœfficient de Fourier a de f est identiquement nul et l'on a plus précisément, uniformément en ω : $|\alpha_T(\omega)| = O(T^{-1/2})$.

Il donna en 1950 – 1951 une série de cours à l'Institute of Fluid Dynamics de l'Université du Maryland (voir ses publications [110], [111], [112], [113] et [118]). Une partie de ses lectures [112] et [118] était consacrée à l'analyse harmonique généralisée ; outre ce qui précède, on y trouve notamment rappelé à l'aide d'un contre-exemple dû à Zarantonello le fait que S n'est pas un espace vectoriel et une étude des solutions de l'équation de la chaleur pour la classe S qui sera étudiée plus loin ; Joseph Kampé de Fériet publia aussi ce dernier résultat dans une Note aux *Comptes rendus* du 26 mai 1952 :

Sur une classe de solutions de l'équation de la chaleur [117]

Pour conclure sur ce point, il faut aussi signaler que dans une Note aux *Comptes rendus* du 8 juin 1953

Autocorrélation et spectre quadratique d'une fonction définie sur un groupe abélien localement compact [126]

il proposait une généralisation incluant à la fois l'analyse harmonique classique et l'analyse harmonique généralisée. Il présenta cette généralisation comme suit : désignant par G un groupe abélien localement compact, $\hat{G}$ son dual, $\chi(x, \xi)$ $(x \in G, \xi \in \hat{G})$ les caractères et μ la mesure de Haar sur G, il notait $M^2(G)$ la classe des fonctions f définies sur G, à valeurs complexes, non nulles μ presque partout, de carré intégrable sur tout compact $K \subset G$ et posant pour un tel compact K et pour tous éléments a et b de G, $h = b - a$, il définissait par f_K la fonction tronquée égale à f sur K, nulle en dehors de K

$$\rho(h \mid f_K) = \int_G f_K(x+a)\overline{f_K(x+b)}d\mu(x) \colon \int_G |f_K(x)|^2 \,\mathrm{d}\mu(x)$$

Il définissait par $S^2(G)$ la classe des fonctions f telles que :

a) $f \in M^2(G)$

b) si $K \to G$ la limite de $\rho(h \mid f_K)$ existe pour tout $h \in G$

c) cette limite est continue pour $h = 0$.

Il notait $\rho(h \mid f)$ cette limite qu'il appelait autocorrélation de f et il prouvait qu'elle est de type défini positif sur G.

Une généralisation du théorème de Bochner dûe à André Weil, lui permettait d'en déduire l'existence d'une mesure de probabilité $\sigma(A \mid f)$ sur une tribu de parties de $\hat{G}$, le spectre quadratique de f telle que :

$$\rho(h \mid f) = \int_{\hat{G}} \chi(h, \xi)\,\mathrm{d}\sigma(\xi, f)\,.$$

Il conclut cette Note en remarquant que ceci permet d'éliminer une anomalie lorsque $G = \mathbb{R}$ car $L^2(\mathbb{R}) \subset S'$ mais si $f \in L^2(\mathbb{R})$, la définition de l'autocorrélation au sens de Wiener donne $\rho(h \mid f) = 0$ ce qui n'est pas le cas avec sa méthode.

Outre les travaux qu'il consacre à cette époque au tenseur spectral de la turbulence homogène, il convient aussi de noter que son étude de l'analyse harmonique généralisée le conduira peu après à proposer la notion de fonction aléatoire asymptotiquement stationnaire en tant que généralisation de la stationnarité.

Fonctions aléatoires asymptotiquement stationnaires et décomposition d'une covariance

En septembre 1954, au congrès international de mathématiques d'Amsterdam, Joseph Kampé de Fériet et François N. Frenkiel présentent une communication

Correlation for truncated samples of random functions [130]

Partant d'une fonction aléatoire stationnaire de covariance $R(h \mid f)$, ils remarquent qu'elle ne peut être observée par un expérimentateur que dans un intervalle fini $[-T, +T]$ ce qui les amène à la remplacer par la fonction tronquée $f_T(t, \omega)$ égale à $f(t, \omega)$ dans l'intervalle d'observation, nulle en dehors de cet intervalle. Ils définissent la fonction (aléatoire) de corrélation de f_T par :

$$\rho(h, f_T) = \frac{1}{2T} \int_{-T+(|h|/2)}^{T-(|h|/2)} f(t+\frac{h}{2}, \omega) f(t-\frac{h}{2}, \omega)\,\mathrm{d}t \quad \text{si} \quad |h| \leq 2T, \quad \text{nulle sinon};$$

Ils notent que l'espérance de cette quantité vaut $R(h \mid f)\big(1 - \frac{|h|}{2T}\big)$ si $|h| \leq 2T$ et 0 sinon.

Ceci fut le point de départ d'une nouvelle recherche qu'ils entreprirent en l'étendant à des fonctions aléatoires définies pour $t \geq 0$, non nécessairement stationnaires. Elle se traduira par quatre publications, les trois premières réalisées en commun, la dernière par Joseph Kampé de Fériet seul lors d'une conférence donnée à Chandigarh en décembre 1960 lors de son premier séjour aux Indes :
Estimation de la corrélation d'une fonction aléatoire non stationnaire [163].
Correlation and spectra for non stationary random functions [166].
Correlations and spectra of non stationary random functions [169].
Correlation and spectrum of asymptotically stationary random functions [175].

Chacune de ces publications signale que, dans beaucoup d'expériences, on sent le besoin d'étendre les notions de corrélation et de spectre à certaines fonctions aléatoires qui sont en un certain sens presque stationnaires. Ces fonctions notées $f(t, \omega)$ sont supposées définies sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, $m \otimes \mu$ mesurables (m désignant la mesure de Lebesgue), d'espérances nulles et telles que $E(f^2(t, \omega))$ soit finie pour tout t.

Notant alors $\Gamma(t, s)$ la covariance de f, les auteurs supposent que $\Gamma(t, t)$ est m-intégrable sur chaque intervalle $[a, b]$; ils désignent comme précédemment par $f_T(t, \omega)$ la fonction aléatoire tronquée égale à $f(t, \omega)$ pour $0 \leq t \leq T$, nulle pour $t \geq T$. Ils en déduisent comme précédemment l'existence pour tout h réel de la corrélation (aléatoire) $\rho_T(h, \omega)$ de f_T définie par :

$$\rho_T(h, \omega) = \frac{1}{T} \int_{(|h|)/2}^{T-(|h|/2)} f(\xi - \frac{h}{2}, \omega) f(\xi + \frac{h}{2}, \omega)\,\mathrm{d}\xi \quad \text{si} \quad |h| \leq T, \quad \text{nulle sinon.}$$

La valeur moyenne de ρ_T notée $R_T(h)$, vu les hypothèses faites est donc nulle si $|h| > T$ et vaut sinon

$$\frac{1}{T} \int_{(|h|)/2}^{T-(|h|/2)} \Gamma(\xi - \frac{h}{2}, \xi + \frac{h}{2})\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Ils la dénomment *sous-corrélation de f*.

Transposant les notations de l'exposé de Poitiers de mai 1950 évoqué au paragraphe précédent (*L'analyse spectrale d'une fonction stationnaire en moyenne*), la transformée de Fourier complexe de l'échantillon tronqué f_T notée $\alpha_T(\lambda,\omega)$ est définie presque sûrement par :

$$\alpha_T(\lambda,\omega) = \frac{1}{T}\int_0^T \exp(-i\lambda t) f(t,\omega)\,\mathrm{d}t;$$

c'est une fonction presque sûrement de carré intégrable ce qui permet d'introduire la fonction spectrale (aléatoire)

$$\begin{aligned}
\Psi_T(\lambda,\omega) &= \frac{T}{\pi}\,|\alpha_T(\lambda,\omega)|^2 \quad \text{paire, intégrable, telle que :}\\
\Psi_T(\lambda,\omega) &= \frac{2}{\pi}\int_0^T \rho_T(h,\omega)\cos\lambda h\ \mathrm{d}h \quad \text{et, réciproquement,}\\
\rho_T(h,\omega) &= \int_0^\infty \Psi_T(\lambda,\omega)\cos\lambda h\ \mathrm{d}\lambda\,.
\end{aligned}$$

Passant aux valeurs moyennes, ils définissent *le sous-spectre* de $f_T(t,\omega)$ par :

$$\begin{aligned}
\varphi_T(\lambda) &= E[\Psi_T(\lambda,\omega)] = \frac{2}{\pi}\int_0^T R_T(h)\cos\lambda h\ \mathrm{d}h \quad \text{où}\\
R_T(h) &= \int_0^\infty \varphi_T(\lambda)\cos\lambda h\ \mathrm{d}\lambda\ ;
\end{aligned}$$

par calculs élémentaires, ils obtiennent :

$$\varphi_T(\lambda) = \frac{2}{\pi T}\int_0^T\int_0^T \Gamma(t,s)\cos\lambda(t-s)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s$$

ce qui établit bien que $R_T(h)$ est une corrélation continue.

Selon la terminologie des auteurs, la fonction aléatoire f sera dite *asymptotiquement stationnaire* lorsque $\lim_{T\to+\infty} R_T(h)$ existe pour toute valeur de h ; cette limite est alors notée $R(h)$. Toute fonction aléatoire stationnaire d'ordre deux, d'espérance nulle et de corrélation $\rho(h)$ est bien asymptotiquement stationnaire car $R_T(h) = \rho(h)\big(1-\frac{|h|}{T}\big)$ si $|h| \leq T$, 0 sinon, mais, comme le remarquent les auteurs, la classe des fonctions asymptotiquement stationnaires est bien plus étendue. En particulier, si l'on note $W(t,\omega)$ la fonction aléatoire du mouvement brownien, $\frac{W(t^2,\omega)}{t}$ et $\frac{W(t,\omega)}{\sqrt{t}}$ ne sont pas stationnaires mais le sont asymptotiquement et $R(h)$ vaut 1 dans les deux cas. De même, ils remarquent que lorsque $f(t,\omega)$ est périodique de période τ ou si plus généralement sa covariance vérifie pour tous t et s :

$$\Gamma(t+\tau,s+\tau) = \Gamma(t,s)\,,$$

alors la corrélation limite existe et vaut $\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \Gamma(\xi,\xi+|h|)\,\mathrm{d}\xi$; il en résulte en particulier que si f est la somme de deux fonctions aléatoires indépendantes, l'une périodique et l'autre stationnaire, f est asymptotiquement stationnaire.

Ceci a amené Joseph Kampé de Fériet à se poser le problème plus général suivant : étant donné une fonction aléatoire normale, est-il possible de la décomposer en la somme de deux fonctions aléatoires normales indépendantes, l'une d'elles étant stationnaire ?

Il évoquera ce problème dans une courte communication [180] au congrès international de mathématiques de Stockholm en 1962 après l'avoir développé au préalable dans l'exposé donné à Chandigarh en décembre 1960 où il étudie le cas particulier d'une covariance de la forme

$$\Gamma\big(\xi - \frac{h}{2}, \xi + \frac{h}{2}\big) = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda\xi)\, \mathrm{d}G(\lambda, h)$$

où $G(\lambda, h)$ est non décroissante en λ, telle que :

$$\begin{array}{rl} G(+\infty, h) - G(0, h) < +\infty & \text{pour tout} \quad h \\ G(\lambda_2, h) - G(\lambda_1, h) & \text{est paire en} \quad h \quad \text{si} \quad 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq +\infty \end{array}$$

et représente une fonction définie positive de h.

Posant

$$\begin{array}{rcl} G(0_+, h) - G(0, h) & = & G_1(\lambda, h) \quad \text{et} \\ G(\lambda, h) - G(0_+, h) & = & G_2(\lambda, h) \end{array}$$

ceci lui fournit le résultat recherché car les deux intégrales

$$\Gamma_i\left(\xi - \frac{h}{2}, \xi + \frac{h}{2}\right) = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda\xi)\, \mathrm{d}G_i(\lambda, h) \quad i = 1, 2$$

définissent deux covariances de somme Γ, Γ_1 étant en outre une corrélation ; de plus, pour Γ, la limite $R(h)$ existe et n'est autre que $G(0_+, h) - G(0, h)$.

M.M. Rao fait explicitement référence à ces travaux dans deux de ses publications *Covariance analysis of non stationary time series* (p. 171–223 du tome 1 de Developments in statistics – Academic Press – 1978) et *Harmonizable processes : structure theory* (conférence donnée à la société californienne de probabilité le 22 décembre 1980 parue dans le tome XXVIII, fascicules 3 et 4, p. 296–349 de *L'enseignement mathématique*).

Il signale l'importance de la classe de fonctions qu'il appelle (KF) étudiée par Joseph Kampé de Fériet et François N. Frenkiel et il précise qu'elle inclut les processus fortement harmonisables au sens de Loeve.

L'intérêt de cette classe est qu'elle permet d'introduire une fonction spectrale lorsque la fonction limite $R(h)$ est continue en 0.

Joseph Kampé de Fériet et François N. Frenkiel ont aussi étudié l'estimation de $R(h)$ à partir des échantillons notamment lorsque la covariance Γ est périodique. Ils étudient en particulier le cas de la fonction aléatoire introduite par Norbert Wiener en 1933 (cf. *The Fourier integral and certain of its applications* p. 151–153), fonction définie à partir d'une suite $\{X_n; n \geq 1\}$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi :

$$P\{X_n = 1\} = P\{X_n = -1\} = 1/2\,.$$

Ils notent $V(t,\omega)$ la fonction introduite par Wiener comme suit :

$$V(t,\omega) = X_n \quad \text{si} \quad n-1 \leq t < n\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Cette fonction V est asymptotiquement stationnaire, la covariance limite $R(h)$ valant $(1-|h|)$ si $|h| \leq 1, 0$ sinon.

Notant $\rho_N(h,\omega)$ la covariance (aléatoire) de la fonction tronquée sur $[0,N]$, ils obtiennent le résultat « Pour presque tout échantillon, $\lim\limits_{N\to+\infty} \rho_N(h,\omega) = R(h)$. »

Homogénéité spatiale. Tenseur de corrélation et tenseur spectral

C'est en 1948, au septième congrès international de mécanique appliquée de Londres que Joseph Kampé de Fériet introduisit ce qu'il considéra toujours comme l'une de ses contributions majeures : *le tenseur spectral de la turburlence homogène*. Il consacra plusieurs publications à ce thème (cf. [97], [98], [100], [102], [112] et [113]) et le reprendra aussi dans ses œuvres de synthèse (aux pages 596 à 608 de sa contribution au traité de A. Blanc-Lapierre et R. Fortet, dans *Problèmes mathématiques de la turbulence* et dans *Kinematics of Homogeneous Turbulence* analysé plus loin). Dès 1938–1939, il s'était déjà intéressé aux problèmes de représentation spectrale liés à la turbulence homogène les évoquant dans son mémoire aux Annales de la Société Scientifique de Bruxelles [71] et sa Note aux *Comptes rendus* du 6 mars 1937 *Sur le spectre de la turbulence homogène* [69].

Les travaux qu'il entreprend à partir de 1948–49 ont pour but l'étude de la cinématique de la turbulence homogène. Dans l'exposé qu'il donne à Londres en 1948 et dans sa Note aux *Comptes rendus* [98] qui en résume l'essentiel, il commence par relier son travail à ceux de Th. von Karman et L. Howarth parus en 1937–1938. Il convient ici de rappeler qu'il était dès cette époque très au fait des travaux de Th. von Karman auquel il avait rendu visite aux USA à Pasadena et qu'il recevra à l'Institut de Mécanique des Fluides. Th. von Karman et L. Howarth définissent le *tenseur de corrélation* dans *On the statistical theory of isotropic turbulence* (Proc. Royal Soc. London, Serie A, t. 164, 1938, p. 192).

Il faut toutefois, comme le remarquera Joseph Kampé de Fériet (voir par exemple sa Note p. 597 du traité de A. Blanc-Lapierre et R. Fortet) bien distinguer son point de vue de celui de Th. von Karman. Ce dernier ne considérait pas un ensemble de champs vectoriels $u(x,\omega)$ (où $u = (u_1, u_2, u_3), x = (x_1, x_2, x_3)$) mais un champ vectoriel unique (un échantillon) dépendant non seulement de x mais aussi de t ; il se référait non à des moyennes statistiques mais à des moyennes temporelles

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} u_j(x', s, \omega_0) u_k(x, s, \omega_0)\, \mathrm{d}s$$

qui définissaient le tenseur $R_{jk}(h),\ h = x' - x$.

Au contraire, Joseph Kampé de Fériet va étudier les moyennes statistiques $E(u_j(x',t,\omega)u_k(x,t,\omega))$ et il supposera qu'il s'agit d'une turbulence homogène c'est-à-dire que la loi de probabilité du vecteur vitesse est invariante par translation spatiale.

De plus, von Karman s'était limité au cas d'une turbulence homogène et isotrope donc de distribution invariante par rotation ; c'est cette dernière restriction que se propose de lever Joseph Kampé de Fériet en introduisant le tenseur spectral en 1948. Il faut aussi remarquer qu'au même congrès de Londres G.K. Batchelor (*Recent developments in Turbulence Research*) proposa une définition du tenseur spectral voisine de celle de Joseph Kampé de Fériet (cf. la Note de ce dernier p. 600 du traité de A. Blanc-Lapierre et R. Fortet).

Dès le départ de son exposé de Londres, Joseph Kampé de Fériet note : « Le but essentiel de cet exposé, c'est de montrer que, si l'on substitue au tenseur de corrélation un nouveau tenseur, que je propose d'appeler *tenseur spectral,* défini par les transformées de Fourier des cœfficients de corrélation, on dispose d'un instrument de travail plus souple, assez maniable pour permettre d'écarter la restriction supplémentaire de l'isotropie.

« Les traits généraux de la cinématique de la turbulence homogène se laissent alors aisément dessiner ; un des résultats principaux, c'est que la condition d'incompressibilité impose au tenseur spectral une forme bien déterminée ; il apparaît comme la somme de deux tenseurs, dont l'un correspond à une turbulence isotrope, l'autre traduisant au contraire l'influence de l'anisotropie ; il faut noter également une relation très simple entre le tenseur spectral et le tenseur analogue défini pour le tourbillon. La Mécanique de la turbulence, basée sur les équations de Navier, donc sur un fondement que l'on doit n'admettre qu'avec prudence est ensuite exquissée ; elle nécessiterait l'étude des moments d'ordre 3, qui n'est pas abordée ici ».

Dès le début, il suppose, pour plus de généralité, que les composantes du vecteur vitesse sont à valeurs complexes ; il en est donc de même du tenseur de corrélation dont il rappelle les propriétés essentielles, le supposant continu en 0. Il introduit ensuite l'espace Λ des vecteurs fréquences dont un point λ a pour coordonnées les 3 nombres réels λ_1, λ_2, λ_3, son module μ étant défini par $\mu^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$.

Il signale aussi la possibilité d'étendre les résultats de Khintchine et de Cramér en introduisant des intégrales de Fourier-Stieltjes (ce qu'il fera dans son exposé de juillet 1949 à Washington [102] examiné plus loin) sous la forme

$$R_{jk}(h) = \int_\Lambda \exp(i(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \lambda_3 h_3))\, \mathrm{d}\mathcal{F}_{jk}(\lambda)\,,$$

mais il se limite au cas d'un spectre de bande absolument continu, en posant :

$$R_{jk}(h) = \int_\Lambda \exp(i(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \lambda_3 h_3))\varphi_{jk}(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda_1\ \mathrm{d}\lambda_2\ \mathrm{d}\lambda_3\,,$$

les 9 fonctions $\varphi_{jk}(\lambda)$ étant supposées intégrables et il leur impose en outre la condition supplémentaire

$$\int_\Lambda \mu^4 \left|\varphi_{jk}(\lambda)\right| d\lambda_1\ d\lambda_2\ d\lambda_3 < +\infty \quad j \quad \text{et} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Celle-ci lui permet de traiter le cas d'un fluide incompressible (non envisagé par Batchelor) i.e. vérifiant la condition $\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$ en montrant qu'elle se traduit en termes de tenseur spectral par $\sum_{j=1}^{3} \lambda_j \varphi_{jk}(\lambda) = 0\,, k = 1, 2, 3$. Elle lui permet aussi d'établir que dans ce cas $\varphi_{jk}(\lambda)$ s'écrit sous la forme simple :

$$\varphi_{jk}(\lambda) = a_j(\lambda)\overline{a_k(\lambda)} + b_j(\lambda)\overline{b_k(\lambda)}\,,$$

où les vecteurs complexes (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) sont orthogonaux entre eux ainsi qu'au vecteur fréquence $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Enfin, il établit que le vecteur « tourbillon » $\Omega = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\, u$ définit aussi un champ aléatoire homogène, continu en moyenne, de densité spectrale liée simplement à φ_{jk} par :

$$\Psi_{jk}(\lambda) = \mu^2\Big(-\varphi_{jk}(\lambda) + \Big(\delta_{jk} - \frac{\lambda_j\lambda_k}{\mu^2}\Big)\varphi(\lambda)\Big)$$

où

$$\varphi(\lambda) = \sum_{j=1}^{3} \varphi_{jj}(\lambda) \quad \text{et} \quad E\big(\sum_{j=1}^{3} |u_j(x, t, \omega)|^2\big) = \frac{1}{2}\int_\Lambda \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

énergie cinétique moyenne du vecteur vitesse, celle du tourbillon notée $\Psi(\lambda)$ valant $\mu^2\varphi(\lambda)$.

Il généralise ces résultats dans sa publication de juillet 1949 :

Spectral tensor of a homogeneous turbulence [101]

Il y donne l'expression du tenseur de corrélation sous la forme :

$$R_{jk}(h) = \int_\Lambda \exp\big(i(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \lambda_3 h_3)\big)\,\mathrm{d}\Phi_{jk}(\lambda)$$

et il explicite les propriétés du « tenseur spectral » Φ_{jk} en mettant en évidence les cas particuliers de l'absolue continuité d'une part et celui où les Φ_{jj} sont des fonctions en escalier tout en mettant en doute dans le cas de la turbulence l'existence d'un pur spectre de raies.

Il signale que sa représentation générale s'appuie sur les travaux qu'il vient d'effectuer à cette même date sur la représentation des fonctions aléatoires et notamment sa communication déjà citée : « *Fonctions aléatoires et groupes de transformations dans un espace abstrait* » [96].

Sa démonstration, également reproduite aux pages 597 à 600 du traité de A. Blanc-Lapierre et R. Fortet, se déroule comme suit : il part de l'espace de Hilbert $H = L^2(\Omega)$ (où $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ est un espace probabilisé), du groupe G des bijections $T_x = T_{x_1,x_2,x_3}$ de Ω dans lui-même conservant la probabilité μ ; il y associe une famille de projections de H qu'il note $E_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3} = E_\lambda$.

Il note U_x la transformation unitaire de $L^2(\Omega)$ définie par l'égalité

$$f(T_x\omega) = U_x f(\omega)$$

ce qui lui permet d'écrire la formule

$$(U_x f, g) = \int_\Lambda \exp(i(\lambda, x))\, \mathrm{d}(E_\lambda f, g)$$

d'où « pour un champ vectoriel aléatoire réprésentant un écoulement spatialement homogène continu en moyenne quadratique

$$u_j(x, \omega) = f_j(T_x \omega) \quad f_j(\omega) \in L^2(\Omega)$$

on a pour tout $g \in H$

$$(u_j(x, \omega), g(\omega)) = \int_\Lambda \exp(i(\lambda, x))\, \mathrm{d}(E_\lambda f_j, g)$$

ou symboliquement

$$u_j(x, \omega) = \int_\Lambda \exp(i(\lambda, x))\, \mathrm{d}E_\lambda f_j\,. \qquad \text{»}$$

Ceci lui fournit en particulier la décomposition spectrale du tenseur de corrélation

$$\rho_{jk}(h) = (u_j(h, \omega), u_k(0, \omega)) = \int_\Lambda \exp(i(\lambda, h))\, \mathrm{d}(E_\lambda f_j, f_k)$$

qui fait apparaître le tenseur $S_{jk}(\lambda) = (E_\lambda f_j, f_k)$ (cf. Blanc-Lapierre et Fortet p. 598–600).

Ces résultats sont aussi repris dans les leçons qu'il donne à Varenna en 1954 *Problèmes mathématiques de la turbulence homogène.*

L'ensemble de tous les problèmes relatifs aux mesures de probabilité sur certains espaces fonctionnels et à la représentation spectrale des champs de vecteurs aléatoires sera repris dans sa publication *Kinematics of Homogeneous Turbulence* qui va maintenant être analysée en même temps que les parties de *Well set Cauchy-problems* qui en généralisent certains résultats.

Kinematics of Homogeneous Turbulence **et** ***Well set Cauchy problems.***

L'essentiel des résultats établis dans *Kinematics of Homogeneous Turbulence* avait déjà été annoncé par Garrett Birkhoff et Joseph Kampé de Fériet dans une Note aux *Comptes rendus* du 5 juillet 1954

« *Sur un modèle de turbulence homogène isotrope* » [129]

Il s'agissait pour eux de construire un modèle du champ des vitesses d'un fluide à un instant donné t, les composantes $u_j(x, \omega) j = 1, 2, 3$ étant définies sur $X \times \Omega$ où « Ω est l'ensemble de tous les champs de vitesse définis et continus dans l'espace euclidien X » avec une mesure μ de probabilité invariante par le groupe des transformations euclidiennes (turbulence homogène et isotrope), le fluide étant incompressible. Dans cette Note, ils énonçaient :

« A chaque spectre d'énergie $\Phi(\kappa)$ absolument continu correspond dans Ω une et une seule mesure homogène et isotrope μ définissant une statistique selon la loi normale ...

« La démonstration de l'existence de μ (dont les détails et les généralisations seront publiées ailleurs) est basée sur la représentation des fonctions aléatoires stationnaires $u_j(x,\omega)$ par des moyennes mobiles d'une mesure de Wiener

$$u_j(x,\omega) = \int_X \gamma_j(x-y)\,\mathrm{d}_y W(y,\omega)\,, \quad \gamma_j(x) \in L^2(X)$$

...

« Nous avons établi que, effectivement, la mesure μ, déterminée univoquement par le spectre absolument continu $\Phi(\kappa)$ possède la transitivité métrique. Ce résultat justifie l'équivalence, avec la probabilité 1, des moyennes spatiales calculées sur un échantillon dans l'espace X et des moyennes statistiques de Gibbs, calculées sur l'ensemble Ω pour un x donné ... »

Comme on va le voir ci-après, on retrouve bien les grandes lignes du contenu des deux articles de *Kinematics of Homogeneous Turbulence.*

On peut aussi noter qu'au chapitre 5 de *Problèmes mathématiques de la turbulence homogène*, intitulé *La turbulence homogène* Joseph Kampé de Fériet commençait par reprendre les résultats déjà donnés dans sa contribution au traité de Blanc-Lapierre et Fortet.

Au paragraphe 7, intitulé « *Cinématique de la turbulence homogène* », il notait ensuite :

« Dans l'exposé qui précède, l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ est resté abstrait ; les résultats demeurent exacts quels que soient les espaces de probabilité particuliers auxquels on les applique ...

« Pour qu'un champ vectoriel aléatoire s'applique réellement à la cinématique de la turbulence homogène, il faut que l'ensemble des échantillons contienne tous les champs vectoriels susceptibles de représenter à un instant donné le champ des vitesses d'une turbulence homogène ... Au lieu d'aboutir à un ensemble d'échantillons qui nous est imposé par un choix des $u_j(x,\omega)$, nous devons au contraire, partir, a priori, d'un ensemble de champs vectoriels suffisamment ample : c'est cet ensemble lui-même qui constitue Ω ....

« G. Birkhoff et moi-même publierons prochainement un travail « *Kinematics of homogeneous turbulence* » où Ω est l'ensemble de tous les champs vectoriels tels que l'énergie cinétique $\frac{\rho}{2}\int_D \sum_j V_j^2(x)\,\mathrm{d}x$ soit finie pour tout domaine D compact.

« La mesure μ que nous définissons sur Ω est une mesure normale en ce sens que toute fonctionnelle linéaire sur Ω suit une loi de Laplace Gauss ... »

Kinematics of Homogeneous Turbulence fera l'objet de deux publications ; la première qui regroupe les parties A, B, C de ce travail parut en 1958, la seconde consacrée à la partie D parut en 1962.

Une bonne partie des résultats de 1958 furent repris et généralisés en 1973 dans *Statistically well set Cauchy problems*, les résultats obtenus en 1958 étant étendus à l'espace $\mathcal{S}'$ des distributions tempérées et à l'espace D' des distributions en vue de leur application à certains problèmes posés par les solutions aléatoires d'équations aux dérivées partielles. Ceci conduit à une étude conjointe de ces deux publications, les résultats de *Statistically well set Cauchy problems* ayant trait aux solutions aléatoires d'équations aux dérivées partielles étant exposés ultérieurement.

Après avoir rappelé que la théorie moderne des fonctions aléatoires permit une approche rigoureuse des problèmes de la turbulence homogène, Garrett Birkhoff et Joseph Kampé de Fériet débutent *Kinematics of Homogeneous Turbulence* en précisant que les composantes de la vitesse dans un flot turbulent doivent être considérées comme des fonctions aléatoires de x et t, leur étude se limitant à l'aspect cinématique du problème en supposant t fixé. Pour plus de généralité, ils considèrent l'ensemble Ω des champs de vitesse à q composantes réelles définies sur l'espace $X = \mathbb{R}^p$, un tel champ étant noté $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_q(x))$ où $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$. Ces notations seront reprises dans *Statistically well set Cauchy problems*, l'espace X y étant défini par $X = K^s\mathbb{R}^{n-s}(0 \leq s \leq n)$ où K désigne le cercle unité.

La partie A intitulée *Random Vector Fields* fut donc consacrée à la représentation des champs de vitesse aléatoires. Ils rappellent d'abord qu'à la suite de nombreux auteurs dont Wiener et Doob, Joseph Kampé de Fériet représentait auparavant un tel champ sous la forme $u(x, \omega)$ défini et mesurable sur $\mathbb{R}^p \times \Omega$, Ω étant un espace abstrait non spécifié. Ils précisent ensuite que leur objectif est l'étude des mesures de probabilité régulières sur l'espace vectoriel topologique (de Fréchet) $\Lambda = \Lambda_2$ des champs de vecteurs de carrés intégrables sur tout compact D. Pour eux, une mesure de probabilité sur un espace topologique Ω est régulière si elle est la complétion au sens de Lebesgue de sa restriction aux boréliens de Ω. Ceci les amène à comparer successivement cette définition de la régularité à celle donnée par d'autres auteurs dont Caratheodory, Halmos et Berberian puis à la notion de L-mesure due à M. Fréchet et E. Mourier et enfin à la notion de mesure parfaite au sens de Gnedenko et Kolmogoroff. Cette comparaison sera reprise de manière plus approfondie dans *Statistically well set Cauchy problems* où il est prouvé que ces diverses notions sont équivalentes dans le cas des espaces vectoriels topologiques suivants :

- L'espace fonctionnel Γ des fonctions définies sur X, continues sur tout compact,
- L'espace fonctionnel Λ_p des fonctions définies et mesurables sur X, de p-ième puissance intégrable sur tout compact,
- L'espace S' des distributions tempérées et l'espace D' des distributions.

Dans *Kinematics of Homogeneous Turbulence*, les auteurs rappellent d'abord que dans un espace de Banach, une mesure de probabilité μ est une L-mesure si et seulement si toutes les fonctionnelles linéaires sont μ-mesurables ; ils en déduisent qu'une mesure de probabilité sur un espace de Banach séparable est une L-mesure si et seulement si c'est une extension d'une mesure régulière pour la topologie forte. Dans *Statistically well set Cauchy problems*, ils généralisent la notion de L-mesure au cas d'un espace vectoriel topologique localement convexe E de dual E' et ils en déduisent le résultat suivant (cf. p. 105).

« Soit μ une L-mesure sur E. Alors la complétion $\tilde{\mu}$ de μ est une extension d'une mesure régulière sur E. »

Un résultat similaire est énoncé pour la régularité au sens de Caratheodory et il est aussi prouvé (cf. p. 22) le Théorème 2.4. « si μ est une mesure de probabilité régulière sur Γ, Λ_p, S' ou D' alors μ est parfaite au sens de Gnedenko et Kolmogoroff et elle est à la fois extérieurement et intérieurement régulière au sens d'Halmos. »

Il y est aussi prouvé qu'en tant qu'espaces topologiques ils sont T_1 et qu'il existe une bijection borélienne entre chacun d'eux et $[0,1]$ autrement dit que leurs structures boréliennes sont « standard », les boréliens de Λ_p, Γ et S' étant exactement ceux des boréliens de D' contenus respectivement dans Λ_p, Γ, S'.

Dans *Kinematics of Homogeneous Turbulence*, il est aussi prouvé que, pour un champ de vecteurs aléatoire $u(x,\omega)$, si $\Omega = \Lambda_2$ et

$$E_D(\omega) = \int_D \|u(x,\omega)\|^2 \, \mathrm{d}m(x)$$

où D borné et mesurable alors pour tout réel positif E

$$\{\omega\,;\, E_D(\omega) \leq E\} \quad \text{est un borélien de} \quad \Lambda_2$$

et qu'il en résulte que pour toute mesure régulière sur Λ_2, l'énergie E_D sur tout compact de $\mathbb{R}^p$ est une fonction non négative mesurable ce qui permet de définir sa valeur moyenne notée $\bar{E}_D$.

De même, si $e(x)$ est une fonction mesurable à support compact, le produit intérieur (e,u) est une fonction borélienne sur Λ_2 donc mesurable pour toute mesure régulière.

Ceci les amène à définir une probabilité régulière sur $\Lambda = \Lambda_2$ comme *admissible* si l'énergie moyenne $\bar{E}_D$ sur chaque compact D est finie.

Ils prouvent également que toute mesure régulière sur Λ est strictement séparable donc métriquement séparable (pour la métrique $|S-T| = \mu(S\Delta T)$).

Notant $\mathcal{C}$ la classe des champs de vecteurs « essentiellement » continus sur $\mathbb{R}^p$ i.e. équivalents à une fonction continue, $C^{(k)}$ et $C^{(\infty)}$ les champs de vecteurs de k-ième dérivée continue (respectivement indéfiniment dérivables), ils prouvent que C, $C^{(k)}$ et $C^{(\infty)}$ sont des boréliens de Λ ce qui les amène à définir un champ de vecteurs aléatoire continu par une mesure de probabilité régulière μ sur Λ telle que $\mu(\mathcal{C}) = 1$ et ils en déduisent que « les mesures de probabilité régulières sur Λ telles que $\mu(C) = 1$ définissent les mesures régulières sur Γ ».

Partant d'un champ de vecteurs aléatoire $u(x,\omega)$ défini sur $\mathbb{R}^p \times \Omega$, $m \otimes \mu$ mesurable, tel que pour tout compact D

$$\overline{E(D)} = \int_{\Omega \times D} \|u(x,\omega)\|^2 \, \mathrm{d}m(x) \, \mathrm{d}\mu(\omega) < +\infty$$

ils en déduisent que ceci permet de définir une probabilité régulière admissible sur Λ.

Utilisant la base orthonormale de Haar de $L_2[0,1]$, $h_n(x)$, ils établissent ensuite la réciproque (p. 674, théorème 5) à l'aide de la base de Haar de $L^2[\mathbb{R}^p]$

notée $H_{k,n}(x)$, définie pour les vecteurs à coordonnées entières positives $n = (n_1, n_2, \dots, n_p)$ et $k = (k_1 \dots k_p)$ par

$$\begin{aligned} H_{k,n}(x) &= h_{n_1}(x_1 - k_1) \dots h_{n_p}(x_p - k_p) \quad \text{si} \quad k_i \leq x_i < k_i + 1,\ i = 1, 2, \dots, p \\ &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

Leur énoncé, adaptation d'un résultat d'Halmos et von Neumann est le suivant :
« Si μ est une mesure de probabilité admissible sur Λ, alors il existe une fonction borélienne $c(\alpha)$ définie sur l'intervalle unité $[0, 1]$ appartenant à Λ telle que chacune des composantes :

$$u_j(x, \alpha) = \sum_{k,n} c_{k,n,j}(\alpha) H_{k,n}(x) \quad j = 1, 2, \dots, q$$

soit une fonction borélienne définie sur $\mathbb{R}^p \times I$ définissant sur Λ une mesure μ^* équivalente à μ ».

Dans *Statistically well set Cauchy problems* après avoir généralisé la notion de mesure admissible, les auteurs étendent ce théorème de représentation ci-dessus aux espaces Λ_p, Γ, S' ou D' en partant d'un espace fonctionnel E et d'une mesure de probabilité régulière μ sur cet espace. A l'aide d'une remarque de Doob, ils posent $\Omega = \Gamma(X)$ ou $S'(X)$ ou $D'(X)$.

Lorsque $E = \Lambda_p(X)$, ils établissent le résultat suivant

« Soit μ une mesure de probabilité régulière sur Λ_p $(1 \leq p < +\infty)$. Alors il existe une fonction borélienne $v(x, \omega)$ définie sur $X \times \Lambda_p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$, $m \otimes \mu$ mesurable, telle que $v(x, \omega)$ est représentée pour chaque ω fixé appartenant à Λ_p par elle-même ».

La démonstration, basée sur le théorème de densité de Lebesgue, plus simple que celle de *Kinematics of Homogeneous Turbulence* s'établit comme suit : pour chaque entier $j = 1, 2, \dots$ soit $h = 2^{-j}$ et soit ω une classe d'équivalence de fonctions de Λ_p ; pour chaque $u(x) \in \Lambda_p$

$$v_j(x, \omega) = (2h)^{-n} \int_{-h}^{+h} \dots \int_{-h}^{+h} u_j(x_1 + c_1, \dots, x_n + c_n) \, \mathrm{d}c_1 \dots \mathrm{d}c_n$$

est une fonction continue de x ; posant $v(x, \omega) = \lim_{j \to \infty} v_j(x, \omega)$ si cette limite existe, 0 sinon, v appartient à la classe d'équivalence de ω d'où le résultat.

En particulier si μ est admissible, pour tout domaine compact de D, les coordonnées de $v(x, \omega)$ sont $m \otimes \mu$ intégrables sur $D \times \Lambda_p$.

La seconde partie notée B de *Kinematics of Homogeneous Turbulence*, intitulée *Covariance and Correlation* était consacrée aux champs de vecteurs aléatoires admissibles. Un tel champ noté $u(x, \alpha)$ était donc tel que pour tout compact D

$$u(x, \alpha) \in [L^2(D \times \Lambda)]^q \,;$$

ceci leur permettait de définir pour presque tout x sa vitesse moyenne

$$v(x) = \int_\Lambda u(x, \alpha) \, \mathrm{d}\mu(\alpha)$$

et sa vitesse turbulente

$$u'(x, \alpha) = u(x, \alpha) - v(x)$$

et pour presque tous x et y la matrice de covariance $\Gamma(x, y) = (\Gamma_{jk}(x, y))$. Ils rappelaient aussi les propriétés caractéristiques de Γ dont le développement en série de Mercer sur un compact D

$$\Gamma_{jk}(x, y) = \sum_n \lambda_n \phi_{nj}(x) \phi_{nk}(y) ,$$

série convergeant fortement dans $[L^2(D \times D)]^q$, la convergence étant uniforme pour un champ de vecteurs continu en moyenne.

Garrett Birkhoff et Joseph Kampé de Fériet ont ensuite établi qu'étant donné un champ de vecteurs aléatoire admissible sur un compact D, il existe toujours un champ de vecteurs aléatoire normal admissible ayant même moyenne et même matrice de covariance et ils en ont conclu « qu'une fonction matricielle $\Gamma_{jk}(x, y)$ définie sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ est matrice d'un champ de vecteurs aléatoire admissible si et seulement si elle est admissible (i.e. appartient à $[L^2(D \times D)]^q$ pour tout compact), symétrique et de type positif » et qu'elle est en particulier la matrice de covariances d'un unique champ de vecteurs aléatoire normal admissible.

Ils définissent ensuite un champ de vecteurs aléatoire admissible comme homogène (respectivement isotrope) si la mesure de probabilité μ qui lui est associée est invariante par translation (respectivement rotation et symétrie). Pour un tel champ, sa matrice de covariance dite matrice de corrélation s'écrit donc :

$$\Gamma_{jk}(x, y) = R_{jk}(x - y) .$$

Elle est nécessairement uniformément continue ce qui leur permet d'énoncer qu'un champ de vecteurs aléatoire homogène admissible est toujours continu en moyenne et de caractériser la matrice de corrélation d'un tel champ comme suit (cf. Théorème 5, p. 668) :

« Une matrice donnée $R_{jk}(h)$ est la matrice de corrélation d'un champ de vecteurs aléatoire homogène admissible si et seulement si elle est continue, symétrique et définie positive ».

Ils signalent ainsi au passage que la continuité en moyenne n'implique nullement la continuité presque sûre des échantillons à l'aide du contre-exemple simple suivant : $u(x) = \sum_1^\infty A_k \cos((k!)x + \alpha_k)$ où les suites (A_k) et (α_k) sont indépendantes, les variables A_k étant indépendantes, normales, centrées, de variance $E(A_k^2) = k^{-4/3}$ et les α_k étant indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 2\pi[$.

En supposant de plus que $\mu(C^{(2)}) = 1$ (c'est-à-dire que le champ de vecteurs aléatoire homogène admissible possède une dérivée continue en moyenne), ils caractérisent son incompressibilité presque sûre sous les formes équivalentes suivantes :

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 R_{ij}}{\partial h_i \partial h_j}(0) \quad = \quad 0$$

ou

$$\sum_j \frac{\partial R_{jk}}{\partial h_j}(h) = \sum_k \frac{\partial R_{jk}}{\partial h_k}(h) \quad = \quad 0 \quad \text{pour tout} \quad h\,,$$

complétant et précisant ainsi un résultat déjà partiellement énoncé par Joseph Kampé de Fériet dans le chapitre XIV, p. 604, du traité de A. Blanc Lapierre et R. Fortet.

Les parties C et D de *Kinematics of Homogeneous Turbulence* sont entièrement consacrées aux champs de vecteurs aléatoires homogènes admissibles.

Dans la partie C intitulée *Energy spectrum*, les auteurs généralisent les résultats obtenus précédemment par Joseph Kampé de Fériet pour le tenseur spectral de la turbulence homogène et considèrent des champs de vecteurs aléatoires homogènes admissibles à composantes complexes. Ils définissent un tel champ comme associé à la matrice complexe spectrale $S_{jk}(K)$ si sa matrice de corrélation s'écrit comme transformée de Stieltjes-Lebesgue de S_{jk} soit :

$$R_{jk}(h) = \int_{\mathbb{R}^p} \exp(iK, h)\, \mathrm{d}S_{jk}(K)\,.$$

Ils définissent la matrice $S_{jk}(K)$ comme matrice hermitienne de mesure si elle est bornée, σ-additive et définie non négative pour tous boréliens K de $\mathbb{R}^p$. Ils établissent ensuite le résultat suivant : « La matrice de corrélation de chaque champ de vecteurs aléatoire homogène admissible est associée à une et une seule matrice de mesure hermitienne $S_{jk}(K)$ et réciproquement toute matrice hermitienne de mesure est associée à un champ de vecteurs aléatoire homogène admissible ». En particulier, ils en déduisent les formules :

$$R_{jk}(h) \quad = \quad \int_\Lambda u_j(x,\omega) u_k^*(x+h,\omega)\, \mathrm{d}\mu(\omega)$$

et

$$R_{jk}(h) \quad = \quad \int_{\mathbb{R}^p} \exp(iK, h)\, \mathrm{d}S_{jk}(K)\,;$$

enfin ils établissent une correspondance bijective entre la classe des champs de vecteurs aléatoires normaux homogènes admissibles et la classe des matrices de mesures hermitiennes positives ce qui leur permet de caractériser l'incompressibilité et l'isotropie.

La dernière partie de ce travail notée D, parut en 1962 ; elle était consacrée à la théorie ergodique et à la transitivité métrique, le résultat essentiel obtenu étant que tout champ de vecteurs aléatoire normal homogène et admissible dont la matrice spectrale est absolument continue possède la transitivité métrique ; sous la condition d'absolue continuité, ils étendaient ainsi des résultats établis par G. Maruyama en 1949 dans *The harmonic analysis of stationary stochastic processes*, (Mem. Fac. Sciences Kyusyu Univ. 1949, 45–106).

Pour y parvenir, ils commencent par généraliser un résultat établi par Doob pour les processus stationnaires gaussiens à spectre absolument continu (cf. *Stochastic processes,* p. 532–534) représentés sous forme de moyennes mobiles

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c^*(\lambda - t)\, \mathrm{d}\xi(\lambda)$$

où c^* est de carré intégrable sur $\mathbb{R}$, ξ étant le processus de Wiener-Lévy.

Ils donnent à cet effet une représentation des champs de vecteurs aléatoires normaux homogènes admissibles à spectre absolument continu par des moyennes mobiles sous la forme

$$u(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}^p} c(x-y) W(\,\mathrm{d}y,\omega) = \int_{\mathbb{R}^p} c(x-y)\,\mathrm{d}V(y,\omega)$$

où V est une généralisation à $\mathbb{R}^p$ du processus de Wiener. Comme pour ce dernier, ces intégrales ne peuvent être considérées comme des intégrales de Stieltjes, V n'étant presque sûrement pas de variation bornée.

Ils précisent d'abord la signification des intégrales

$$\int_{\mathbb{R}^p} f(y)\,\mathrm{d}V(y,\omega) \quad \text{pour} \quad f \in L^2(\mathbb{R}^p)$$

par une méthode analogue à celle déjà évoquée, utilisée par Joseph Kampé de Fériet pour définir des « *pseudo intégrales de Stieltjes aléatoires* » (cf. [170] et [173]). La construction de ces intégrales utilise les fonctions $H_{k,n}(x)$ qui définissent la base de Haar de $L^2(\mathbb{R}^p)$. À cette suite orthonormale, ils associent bijectivement une suite $\{A_{k,n}(\omega)\}$ de variables aléatoires normales réduites indépendantes.

Cette suite leur permet d'abord de construire la fonction aléatoire normale V qui généralise à $\mathbb{R}^p$ le processus de Wiener puis de définir l'intégrale aléatoire

$$\int_{\mathbb{R}^p} f(y)\,\mathrm{d}V(y,\omega)$$

par la somme de la série presque sûrement convergente

$$\sum_{k,n} c_{k,n} A_{k,n}(\omega)$$

construite à partir de la suite $\{c_{k,n}\}$ des cœfficients de Fourier de f dans la base de Haar ; la somme de cette série est une variable aléatoire normale centrée de variance

$$\int_{\mathbb{R}^p} f^2(y)\,\mathrm{d}m(y)\,.$$

Ils définissent ensuite par ce procédé la moyenne mobile

$$\int_{\mathbb{R}^p} c(x-y) dV(y,\omega)$$

comme étant la somme de la série

$$\sum_{k,n} \alpha_{k,n}(x) A_{k,n}(\omega)\,,$$

$\alpha_{k,n}(x)$ étant défini par l'égalité

$$\alpha_{k,n}(x) = \int_{\mathbb{R}^p} c(x-y) H_{k,n}(y)\,\mathrm{d}m(y)\,.$$

C'est une série d'éléments aléatoires indépendants de carrés intégrables sur tout compact donc à valeurs dans l'espace Λ. Or, simultanément, Joseph Kampé de Fériet et Garrett Birkhoff établissent en annexe une généralisation à tout espace de Hilbert séparable du critère de convergence presque sûre de Kolmogoroff sous la forme suivante :

« Soit $u_1 + u_2 + u_3 \dots$ une série infinie d'éléments aléatoires indépendants centrés d'un espace de Hilbert séparable telle que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} E(\|u_k\|^2) < +\infty$$

Alors la série converge fortement presque sûrement vers un vecteur v tel que

$$E(\|v\|^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} E(\|u_k\|^2) \,. \quad \text{»}$$

Une application répétée de ce critère à la série

$$\sum_{k,n} \alpha_{k,n}(x) A_{k,n}(\omega)$$

leur permet d'établir que sa somme $u(x, \omega)$ est presque sûrement un élément de l'espace Λ des fonctions de carré intégrable sur tout compact tel que :

$$\begin{aligned} E(u(x,\omega)u(x',\omega)) &= \sum_{k,n} \alpha_{k,n}(x)\alpha_{k,n}(x') = \int_{\mathbb{R}^p} c(x-y)c(x'-y)\,\mathrm{d}m(y) \\ &= R(x-x') \,. \end{aligned}$$

De plus, par le théorème de Plancherel

$$c(\xi) = \int_{\mathbb{R}^p} [a(\kappa)\cos(\kappa.\,\xi) + b(\kappa)\sin(\kappa.\,\xi)]\,\mathrm{d}m(\kappa)$$

d'où

$$R(h) = \int_{\mathbb{R}^p} [a^2(\kappa) + b^2(\kappa)]\cos(\kappa.\,h)\,\mathrm{d}m(\kappa) \,,$$

ce qui leur permet de conclure comme suit :

« La classe des moyennes mobiles est la même que celle des fonctions aléatoires homogènes, normales, admissibles à spectre absolument continu. »

De même, si $c(\xi)$ est un vecteur appartenant à $[L^2(\mathbb{R}^p)]^q$, l'intégrale vectorielle

$$u(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}^p} c(x-y)\,\mathrm{d}V(y,\omega)$$

définit un champ de vecteurs aléatoires homogène, normal, admissible, de matrice de corrélation :

$$R_{j,k}(h) = \int_{\mathbb{R}^p} c_j(h+\xi)c_k(\xi)\,\mathrm{d}m(\xi)$$

et, avec la représentation de Plancherel :

$$\begin{aligned} c_j(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^p} [a_j(\kappa)\cos(\kappa.\,\xi) + b_j(\kappa)\sin(\kappa.\,\xi)]\,\mathrm{d}m(\xi) \\ R_{j,k}(h) &= \int_{\mathbb{R}^p} [a_j(\kappa)a_k(\kappa) + b_j(\kappa)b_k(\kappa)]\cos(\kappa.\,h)\,\mathrm{d}m(\kappa)\,. \end{aligned}$$

Ceci leur permet d'énoncer qu'un champ de vecteurs homogène admissible est représentable sous la forme de la moyenne mobile vectorielle

$$\int_{\mathbb{R}^p} c(x-y)\,\mathrm{d}V(y,\omega)$$

si et seulement si sa matrice spectrale de mesure est une transformée cosinus absolument continue.

Ceci leur permet enfin d'établir que

« Tout champ de vecteurs aléatoire normal homogène sur $\mathbb{R}^p$ défini par une mesure admissible sur Λ et ayant une matrice spectrale de mesure absolument continue possède la transitivité métrique pour tout groupe de translations à un paramètre. »

L'ensemble des résultats des parties B, C et D de *Kinematics of Homogeneous Turbulence* est repris dans *Statistically well set Cauchy problems* qui contient aussi une extension au cas des distributions tempérées due à Jerry Bona. Cette publication fait aussi référence (cf. p. 71 et suivantes) aux conditions imposées à la matrice spectrale garantissant la continuité presque sûre ou l'existence de dérivées partielles continues jusqu'à un ordre donné de la version séparable d'un champ de vecteur aléatoire normal homogène, conditions exprimées à l'aide de la trace de la matrice spectrale $M = \sum_j R_{jj}(x-y)$ ou de ses dérivées $M^{(i)} = \sum_j \frac{\partial^{2i} M}{\partial x_j^i \partial y_j^i}$ sous la forme

$$M^{(i)}(x+h,x+h) + M^{(i)}(x,x) - 2M^{(i)}(x+h,x) = O[(-\ell n\,|h|)^{\alpha}]\,, \quad \alpha > 1$$

conditions énoncées antérieurement par Yu. K. Belyaev, pour le cas $n=1$.

On y trouve aussi une étude de l'évolution dans le temps d'un système à valeurs initiales aléatoires directement reliée aux recherches que Joseph Kampé de Fériet consacrait depuis 1950 à la Mécanique Statistique des Milieux Continus en vue notamment de fournir un cadre mathématique pour l'étude des solutions aléatoires des équations de Navier-Stokes, ce sont ces recherches qui vont maintenant être étudiées.

4.5 Elaboration d'une mécanique statistique des milieux continus ; intégrales aléatoires d'équations aux dérivées partielles linéaires à cœfficients constants

Introduction En octobre 1949, lors d'un congrès international de philosophie des sciences qui se tint à Paris, Joseph Kampé de Fériet présenta une communication publiée en 1951 sous le titre

Sur la mécanique statistique des milieux continus [103]

S'y référant en 1962 dans *Statistical mechanics of continuous media* [168], il notait :

« It has always been our opinion that a statistical theory of turbulence required for a sound foundation a general statistical mechanics of fluids, based on the equations of motion just as the statistical mechanics of dynamical systems is based on the equations of Hamilton-Jacobi .... »

Cet exposé de 1949 introduisait ainsi pour la première fois ce qui inspirera la majeure partie de ses travaux de 1949 à 1972 : transposer pour certains milieux continus les résultats essentiels de la mécanique statistique des systèmes holonomes à un nombre fini de degrés de liberté sous la forme donnée par Gibbs. Chacune des publications qu'il y consacrera comportait en préalable un rappel de ces résultats ; il y consacrera d'ailleurs une partie des leçons qu'il donna en 1966 au Centre de Recherches Physiques de Marseille à la demande du professeur Th. Vogel, leçons publiées en trois parties [195], [201], [215] de 1968 à 1972 sous le titre :

Introduction à la théorie des systèmes évolutifs aléatoires.

On y trouve d'abord une description générale de systèmes dont l'évolution est décrite par un semi-groupe et dont l'état initial est aléatoire, prouvant des théorèmes de récurrence et un théorème ergodique. Les systèmes dynamiques classiques sont ensuite étudiés dans le cas de systèmes holonomes aléatoires et la troisième partie est consacrée aux « systèmes dont l'évolution est déterminée par des équations aux dérivées partielles. » Cette dernière étude reprend en la complétant une synthèse de ses recherches qu'il avait déjà présentée dans *Statistical mechanics of continuous media* déjà cité et dans l'exposé plus général *Random integrals of differential equations* [184] publié en 1965 ; elle sera aussi incluse dans *Statistically well set Cauchy problems* [222]. Ce rappel des résultats obtenus pour les systèmes holonomes de la mécanique classique se présente comme suit :

1. Définition de l'espace des phases Ω dont les points $\omega(q_1, q_2, \ldots, q_k, p_1, \ldots, p_k)$ (les q_j étant les coordonnées et les p_j les moments conjugués) représentent tous les états possibles du système dynamique.

2. Preuve d'un théorème d'existence et d'unicité pour les intégrales des équations de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial q_j}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_j}\,, \; \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}\,, \quad j = 1, 2, \ldots, k\,,$$

   d'où pour un état initial ω, l'ensemble des états successifs ω_t définit une unique trajectoire ou orbite $\Gamma(\omega)$ dans Ω, l'état du système à l'instant t noté ω_t s'exprimant par une transformation $T_t\omega$, les transformations T_t de Ω dans lui-même constituant un groupe abélien homomorphe au groupe additif des réels.

3. Définir une mesure de probabilité μ sur Ω invariante par T_t (théorème de Liouville).

4. Etudier l'obtention de propriétés ergodiques des transformations T_t c'est-à-dire prouver l'existence de la moyenne temporelle

$$\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{A} \int_0^A f(T_t \omega) dt$$

qui existe pour presque toutes les trajectoires lorsque le groupe de transformations T_t est métriquement transitif, cette moyenne temporelle étant alors égale à la moyenne statistique

$$\int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega)$$

Comme il le note dans *Introduction à la théorie des systèmes évolutifs aléatoires* [215], l'extension en une mécanique statistique des milieux continus revient à supposer que l'espace des phases possède une infinité dénombrable de dimensions et que le groupe de transformations T_t est engendré par un système d'équations aux dérivées partielles.

L'ensemble des états possibles ω d'un milieu continu sera donc défini par un nombre fini de fonctions

$$\omega = u(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_q(x)) \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

définies sur un domaine ouvert D_p de $\mathbb{R}^p$, de frontière B_{p-1}. L'espace Ω devient donc un espace fonctionnel et il note que, pour les espaces fonctionnels qui s'introduisent le plus naturellement dans la mécanique des milieux continus, ω définissant l'état du milieu peut le plus souvent être décrit par une infinité dénombrable de paramètres d'où une bijection :

$$\omega \longleftrightarrow [\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots,]$$

entre l'espace fonctionnel Ω et une partie $\hat{\Omega}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; c'est le cas lorsque les espaces des phases munis de la topologie qui se présente le plus naturellement, sont des espaces de Banach ou de Fréchet à base dénombrable de Schauder. Dès son exposé de 1949, Joseph Kampé de Fériet avait construit avec succès une mécanique statistique de la corde vibrante indéfinie dans les deux sens dans le plan xoy, occupant l'axe Ox au repos. Il soulignait cependant le caractère exceptionnel de ce résultat car l'obtention d'un théorème ergodique ne peut, hormis un cas trivial, être réalisée même pour une corde vibrante à extrémités fixes ; il l'établira en août 1950 à Berkeley [106]. De plus, il notait aussi que l'obtention d'une mesure de probabilité invariante par les transformations T_t posait des problèmes difficiles.

Enfin, pour ce qui était l'objet premier de sa démarche, à savoir le cas d'un fluide visqueux incompressible occupant tout l'espace, il notera à chaque fois que, hormis quelques cas bien particuliers, le caractère non linéaire des équations de

Navier-Stokes n'avait pas jusqu'alors permis d'établir un théorème d'existence et d'unicité des solutions et que de plus, le caractère non conservatif du système ne permettait pas d'envisager l'existence d'un théorème ergodique.

Il soulignera ces difficultés dans *Problèmes mathématiques de la théorie de la turbulence homogène* [154] et dans *Random integrals of differential equations* [184].

Dans cette dernière publication, il consacre tout un paragraphe *Statistical theory of turbulence* aux travaux entrepris en théorie de la turbulence ; après y avoir rappelé l'introduction des notions de tenseur de corrélation et de tenseur spectral, il évoque les résultats que Garrett Birkhoff et lui-même avaient obtenus dans *Kinematics of homogeneous turbulence*, il note « We conclude that the kinematics of homogeneous turbulence is now in good mathematical standing puis "the evolution must be described by a random integral of the Navier-Stokes equations."

« This sounds clear and simple, but unfortunately the theory of random integrals of Navier-Stokes equations still belongs to the realm of wishful thinking. »

A l'appui de ses dires, il évoque les diverses tentatives entreprises citant notamment les travaux de E. Hopf pour conclure :

« We agree with E. Hopf when he writes : the obstacles in the way of highly turbulent fluid flow are still formidable. » Il cite cependant le cas particulier et exceptionnel de l'équation de Bürgers qui se ramène à l'équation de la chaleur.

Dès lors et en l'absence de résultats significatifs sur les équations non linéaires, il va centrer son étude sur les milieux continus régis par des équations aux dérivées partielles linéaires.

Pour illustrer son propos, il proposera donc des modèles de solutions aléatoires de certaines équations aux dérivées partielles linéaires à cœfficients constants de la physique mathématique : équation de la chaleur, des ondes, de Laplace ....

Chacune de ces études sera le plus souvent rattachée à certains de ses travaux antérieurs consacrés aux intégrales de ces équations dans certains espaces fonctionnels, l'aspect aléatoire n'étant alors pas évoqué.

Avant de les examiner en détail, il convient toutefois d'en extraire l'élaboration progressive d'une synthèse qui aboutira à *Statistically well set Cauchy problems* [222].

Présentation générale du problème

Cette présentation est donnée de manière très développée dans *Statistical mechanics of continuous media*, *Random integrals of differential equations* [184] et *Introduction à la théorie générale des systèmes évolutifs aléatoires* [215], les résultats les plus généraux étant contenus dans *Statistically well set Cauchy problems.*

Remarquons d'abord qu'à maintes reprises, il signalera que dans les problèmes qu'il étudie le hasard n'intervient que par le biais des conditions initiales ou des conditions à la frontière ; une intégrale aléatoire d'une équation sera donc connue dès le départ dans la totalité de son intervalle de définition dès lors que sa valeur initiale est connue.

Il note d'ailleurs page 327 de *Random integrals of differential equations* qu'il a donc toujours été amené à choisir le terme « fonction aléatoire » par opposition à l'appellation « processus stochastique » choisie par Paul Lévy pour exprimer l'idée d'une construction progressive de la fonction, le hasard intervenant à chaque étape. Ceci a conduit Joseph Kampé de Fériet à exclure de son domaine de recherches le cas d'un système soumis à des forces aléatoires ou plus généralement celui d'équations à cœfficients aléatoires.

Néanmoins, sans y apporter de contribution personnelle, il fera le point des travaux entrepris dans ce domaine dans *Random integrals of differential equations* [184] évoquant successivement les résultats obtenus pour des équations différentielles linéaires à cœfficients constants dont le second membre est une fonction aléatoire gaussienne stationnaire, les travaux consacrés aux équations différentielles stochastiques en liaison avec la théorie des processus de Markov $\cdots$; la seconde partie de cette publication traitait des problèmes de la turbulence et des équations aux dérivées partielles linéaires à cœfficients constants et à valeurs initiales aléatoires. C'est son étude générale de ces problèmes qui va maintenant être évoquée.

Dans ses publications, il décrit d'abord l'évolution d'un milieu continu en précisant successivement les équations aux dérivées partielles régissant cette évolution, la notion de problème bien posé en précisant les espaces fonctionnels utilisés pour représenter les conditions initiales et les intégrales régulières des équations étudiées et, le cas échéant, le semi-groupe de transformations décrivant l'évolution du système au cours du temps ; ces choix étant faits, il caractérise les éléments aléatoires dans l'espace fonctionnel des conditions initiales et la mesure de probabilité choisie dans cet espace pour construire la mécanique statistique du problème étudié.

Il commence donc par noter qu'à chaque instant t $(0 < t < \tau \leq +\infty)$, le milieu continu remplit le domaine D_p de l'espace $\mathbb{R}^p$ de frontière fixe B_{p-1} ; le plus souvent $D_p = \mathbb{R}^p$. L'état du milieu à chaque instant t est décrit par q fonctions de $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ notées $u_1(x,t), \ldots, u_q(x,t)$, leurs valeurs à l'instant initial $t = 0$ étant par exemple notées $v_1(x), \ldots, v_q(x)$ soit $v(x) = (v_1(x), \ldots, v_q(x))$ et $u(x,t) = (u_1(x,t), \ldots, u_q(x,t))$. Il insistera sur le fait que dans certains cas $v(x)$ et $u(x,t)$ ne peuvent être considérés comme des vecteurs et que c'est en particulier le cas pour les équations de Navier-Stokes où apparaissent u_1, u_2, u_3 composantes de la vitesse et u_4 le scalaire décrivant la pression.

L'évolution du système est décrite par q équations aux dérivées partielles qu'il note

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \mathcal{A}_j \left(u_1, \ldots, u_q, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_q}{\partial x_p}, \ldots, \right)$$

où le second membre est parfois noté $\mathcal{A}_j(x, \omega)$, les $\mathcal{A}_j$ étant des fonctions de la forme $\mathcal{A}_j(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$, chacune des variables $\xi_1, \ldots, \xi_r$ n'étant jamais égale ni au temps ni à aucune des dérivées partielles par rapport au temps de $u_1, u_2, \ldots, u_q$ ce qui, comme il le note dans

Introduction à la théorie des systèmes évolutifs aléatoires [215, p. 4].

revient à exclure du champ de recherches « tous les milieux continus où les efforts intérieurs dépendent à un instant t du passé du système. »

Les fonctions $\mathcal{A}_j$ sont des opérateurs différentiels. Il notera dans la publication citée ci-dessus (cf. p. 6) que, parfois les équations aux dérivées partielles étudiées peuvent se présenter sous la forme :

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \mathcal{A}_j(x,\omega) \quad j = 1,2,\ldots,q-s$$
$$\mathcal{B}_j(x,\omega) = 0 \quad j = 1,2,\ldots,s$$

les $\mathcal{B}_j$ étant, comme les $\mathcal{A}_j$, des opérateurs différentiels portant sur les u_j et leurs dérivées par rapport aux variables d'espace à l'exclusion du temps et des dérivées partielles par rapport au temps.

Dès lors, il rappelle la définition du problème de Cauchy : rechercher les « intégrales » $u_j(x,t)$ $(j = 1,2,\ldots,q)$ vérifiant le système d'équations aux dérivées partielles et telles que $u_j(x,0) = v_j(x)$ $j = 1,2,\ldots,q$.

En fait, dans les travaux qu'il y consacre, il axera sa recherche sur les équations aux dérivées partielles linéaires qu'il présente sous la forme :

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \sum_{k=1}^{q} P_{jk}\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_p}\right) u_k\,,$$

chaque P_{jk} étant un polynôme dont les cœfficients peuvent dépendre de x mais jamais de t.

Ceci l'amène à rappeler qu'un *problème est bien posé* au sens d'Hadamard si l'on peut prouver un théorème d'existence, d'unicité et de continuité pour les intégrales $u_j(x,t)$.

Il notera chaque fois qu'il est essentiel de bien préciser :

α) L'ensemble $\mathcal{U}_0$ de toutes les fonctions $u(x)$ définies sur D_p représentant les conditions initiales admissibles.

β) Lorsque D_p est distinct de $\mathbb{R}^p$, l'ensemble $\mathcal{U}_1$ de toutes les fonctions $u_1(x,t)$ définies sur $B_{p-1}\times]0,\tau[$ représentant les conditions aux limites admissibles.

γ) L'ensemble $\mathcal{U}$ de toutes les fonctions $u(x,t)$ considérées comme intégrales régulières des équations aux dérivées partielles étudiées.

δ) Les topologies choisies sur les ensembles $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}$.

ε) La signification précise à attribuer aux limites :

$$\begin{array}{lllllll} u(x,t) & \to & u_1(x,t) & \text{sur} & B_{p-1} & & \\ u(x,t) & \to & u(x) & \text{sur} & D_p & \text{si} & t\to 0\,. \end{array}$$

Il insistera aussi sur le fait que le choix des espaces $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}$ et de leurs topologies n'est pas unique pour un mathématicien, car une même équation aux dérivées partielles (l'équation de la chaleur par exemple) peut être utilisée pour représenter des problèmes physiques très différents ; leur choix doit donc être basé sur une étude approfondie des propriétés physiques du milieu continu étudié. En fait, lorsque les équations aux dérivées partielles sont linéaires, il est naturel de choisir pour $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}$ des espaces vectoriels topologiques ; ceux-ci seront le plus souvent des espaces de Banach ou de Fréchet à base dénombrable de Schauder donc décrits par une infinité dénombrable de paramètres ce qui constitue pour lui l'extension la plus naturelle de la mécanique statistique de Gibbs. Il notera aussi que, le plus souvent, le choix naturel imposé par le problème physique étudié conduira à remarquer que $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_0$, les intégrales du système étudié étant plus régulières que leurs valeurs initiales.

Dans le cadre classique ainsi défini et en supposant $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_0$ et $D_p = \mathbb{R}^p$ ce qu'il fera la plupart du temps, lorsque les équations sont linéaires, il définit l'application $T_t : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}$ par

$$\forall t > 0 \,, \quad u(x,t) = T_t u_0(x) \,,$$

l'ensemble des transformations linéaires T_t possédant la propriété de semi-groupe (groupe dans le cas hyperbolique) :

$$T_{t+s} = T_t \circ T_s = T_s \circ T_t \quad \text{(principe de Huygens)} \,.$$

Faisant référence aux travaux de E. Hille et R.S. Phillips (*Functional Analysis and Semi-Groups*) il rappelle dans *Statistical Mechanics of Continuous Media* [168], en se situant dans le cadre des espaces de Banach, les notions de semi-groupe fortement continu, de C_0-semi-groupe, de générateur infinitésimal et de problème abstrait de Cauchy. Il évoque aussi le fait que dans certains cas, il est possible aussi de remplacer $\mathcal{U}$ par un autre espace $\mathcal{V}$ isomorphe par utilisation de la transformée de Fourier.

Tout ceci est repris dans *Statistically well set Cauchy problems* [222, p. 27–33] de manière plus générale dans un cadre plus large en faisant appel à des résultats obtenus par Martin Schultz et Jerry Bona pour les distributions tempérées.

Vu les équations aux dérivées partielles que l'on se propose d'étudier, il semblerait normal que les fonctions définissant l'espace $\mathcal{U}$ possèdent toutes les dérivées partielles intervenant dans les équations aux dérivées partielles caractérisant l'évolution du milieu continu.

C'est bien ainsi que Joseph Kampé de Fériet le concevra dans ses premières publications. Cependant, dès 1958, dans *Meccanica statistica dei mezzi continui* [155], fruit d'une conférence donnée à Pise, traitant d'une corde vibrante à extrémités fixées, il notera que, supposer l'existence de dérivées secondes continues en x et en t pour le déplacement longitudinal $u(x,t)$ de la corde revient à éliminer pour celle-ci des états aussi simples qu'une ligne polygonale. Ultérieurement dans *Statistical mechanics of continuous media* [168], il envisagera le cas où $u(x,t)$ n'est astreinte qu'à être absolument continue sur son intervalle de définition, sa dérivée y étant de carré intégrable.

Revenant sur une idée que, dans la ligne de G. Dedebant et Ph. Wehrlé, il avait déjà exprimée dans les années trente dans *Les bases d'une mécanique de* *la turbulence* [60], il notera aux pages 5 et 6 de *Sur les intégrales aléatoires des équations aux dérivées partielles et la mécanique statistique des milieux continus* [177] : « La statistique ne s'utilise en principe que quand on se trouve en présence de phénomènes trop chaotiques pour qu'on puisse donner une description détaillée des éléments qui composent l'ensemble. A ce point de vue, il semble que l'ensemble $\mathcal{U}$ des intégrales régulières du mouvement ne soit pas en général assez chaotique pour servir de base à une véritable mécanique statistique ; il faut élargir $\mathcal{U}$ et prendre pour espace des phases Ω un ensemble formé d'intégrales généralisées $u^*(x,t)$ moins régulières que $u(x,t)$; en principe on prendra pour Ω un espace vectoriel topologique tel que au sens de la topologie de Ω, $\mathcal{U}$ y soit dense. »

Reprenant cette idée dans *Introduction à la théorie des systèmes évolutifs aléatoires* [215, p. 39–41], il sera ainsi amené à introduire la notion *d'intégrale généralisée* du système

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \mathcal{A}_j(x)$$

dans lequel interviennent des dérivées partielles jusqu'à l'ordre m ; il le fera en choisissant pour $\mathcal{U}$ l'espace $C^{(m')}(D_p)(0 \leq m' < m)$ des fonctions continûment dérivables jusqu'à l'ordre m' sur D_p ou même l'espace $L^r(D_p)(r \geq 1)$, l'intégrale généralisée notée ω étant définie comme limite d'une suite ω_n d'intégrales littérales du système étudié.

Ce point de vue est repris et précisé dans *Statistically well set Cauchy problems* ; les auteurs commencent (cf. p. 27–28) par définir le *problème de Cauchy déterministe bien posé* ; ils se donnent un espace fonctionnel E et un sous-ensemble D de valeurs initiales dense dans E, tel que pour chaque $v = v(x)$ appartenant à D le système d'équations aux dérivées partielles ait une et une seule solution (classique) $u(x,t)$ dans E, dépendant continûment de $v = u(0)$ dans D d'où une extension unique par continuité pour v appartenant à E qui sera la solution généralisée.

Il convient aussi de signaler les idées neuves introduites dans cette publication en tant que généralisations.

La première est celle de *problème de Cauchy à valeurs initiales statistiquement déterminées ;* les auteurs (p. 34) supposent définie une mesure de probabilité régulière sur E, un borélien M de E, dense dans E, de mesure 1, tel que pour chaque v appartenant à M, le problème avec une valeur initiale v ait une unique solution d'orbite $\{u(t)\}$ dans E, l'application $T_t \colon M \to E$ définie par $T_t(v) = u(t)$ étant borélienne pour chaque $t > 0$; le problème sera alors dit *statistiquement continu* si l'on suppose T_t continue pour chaque $t > 0$.

Les auteurs avaient remarqué en préalable qu'il fallait aussi envisager le cas où l'on pouvait obtenir des valeurs approchées des solutions avec une probabilité arbitrairement grande en approximant de façon suffisamment étroite les données initiales. Ceci les amène à introduire une ultime généralisation, la notion de *problème de Cauchy statistiquement bien posé* et ils remarquent que cette notion est beaucoup moins sensible au choix de l'espace fonctionnel E censé représenter le problème. Ils le définissent d'abord dans un espace métrique (E,d) pourvu d'une mesure de probabilité régulière μ : l'ensemble M des valeurs initiales étant un borélien de E de probabilité 1, ils supposent que pour $v(0)$ appartenant à M, $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ et $t > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\mu(d(u(t), v(t)) < \eta \mid d(u(0), v(0)) < \delta) > 1 - \varepsilon$$

où $\mu(A \mid B)$ désigne comme de coutume la probabilité conditionnelle. Ils étendent ensuite cette définition au cas non métrique en supposant une solution $v(t)$ du problème telle que $v(0)$ appartienne à M, $\varepsilon > 0$, $t > 0$ et V voisinage de $v(t)$; le problème sera dit statistiquement bien posé s'il existe un voisinage convexe équilibré U de $v(0)$ tel que

$$\mu(u(t) \in V \mid u(0) \in U) > 1 - \varepsilon\,.$$

Ils prouvent d'abord que cette probabilité conditionnelle existe pour les espaces Γ et Λ_p et aussi pour les espaces S' et D' puis que la notion de problème statistiquement bien posé généralise celles de problème statistiquement continu et de problème statistiquement déterminé sans s'y réduire.

Dans *Statistically well set Cauchy problems* comme dans les publications antérieures, l'accent est mis sur les mesures de probabilité normales ; le choix de celles-ci est justifié dans *Les intégrales aléatoires et les équations aux dérivées partielles de la mécanique statistique des milieux continus* [177] par la remarque suivante (cf. p. 9) :

> « Parmi toutes les mesures régulières invariantes correspondant à l'équilibre statistique des milieux continus envisagés c'est une mesure normale qui rend maxima l'entropie du système » ;

il y précise que le mot entropie doit être compris au sens de la théorie de l'Information de Wiener - Shannon. L'importance du rôle qu'il attribue aux mesures de probabilité normales apparaît aussi dans *Kinematics of Homogeneous Turbulence* et *Statistically well set Cauchy problems* où est établie une correspondance bijective entre les champs de vecteurs aléatoires normaux admissibles et la classe des matrices spectrales de mesures elle même en bijection avec celle des matrices de corrélation ; en outre, dans le cas d'un spectre absolument continu, il en découle l'existence d'une transitivité métrique spatiale d'où la possibilité d'énoncer un théorème ergodique spatial. *Statistically well set Cauchy problems* est la dernière publication que Joseph Kampé de Fériet consacrera aux solutions aléatoires d'équations aux dérivées partielles ; ce travail se conclut par une étude du cas parabolique lorsque la loi de probabilité des valeurs initiales est normale et stationnaire par rapport à l'espace $\mathbb{R}^p$ faisant ainsi retour aux problèmes particuliers envisagés antérieurement par Joseph Kampé de Fériet qui vont maintenant être étudiés.

Solutions aléatoires de l'équation de Laplace

L'étude des solutions aléatoires de l'équation de Laplace figure parmi les premiers travaux que Joseph Kampé de Fériet a consacrés à la Mécanique statistique des milieux continus.

Dans une Note aux *Comptes rendus* du 21 décembre 1953

Fonctions aléatoires harmoniques dans un demi-plan [127]

il considère l'intégrale de Poisson

$$u(x,y,\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-\xi)^2+y^2} f(\xi,\omega)\,\mathrm{d}\xi$$

où la fonction aléatoire $f(x,\omega)$ est à valeurs réelles, définie sur l'espace $\mathbb{R}\times\Omega$, $m\otimes\mu$ mesurable (m désignant la mesure de Lebesgue et μ une mesure de probabilité sur l'espace Ω).

En supposant que f est μ-intégrable pour chaque x, telle que : $\gamma(x) = E(|f(x,\omega)|)$ soit m-intégrable sur tout compact et vérifie la condition :

$$\int_0^x \gamma(\xi)\,\mathrm{d}\xi = O(|x|^\alpha) \quad (0\le\alpha<2) \quad \text{si} \quad |x|\to+\infty$$

il prouve que l'intégrale de Poisson définit pour μ presque tout ω une fonction harmonique dans le demi-plan $y>0$ telle que, pour presque tout x :

$$\lim_{y\to+0} u(x,y,\omega) = f(x,\omega)\,.$$

A titre d'exemple, il choisit pour Ω l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et pour μ la mesure de Wiener ; la fonction aléatoire $f(x,\omega)$ devient donc $\omega(x)$ qui vérifie toutes les hypothèses requises. Il note aussi que lorsque f est stationnaire d'ordre deux en x, de corrélation $r(x'-x'') = E[f(x',\omega)f(x'',\omega)]$, la covariance de u a une expression remarquable de la forme $\rho(x'-x'', y'+y'')$ avec

$$\rho(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-\xi)^2+y^2} r(\xi)\,\mathrm{d}\xi\ ;$$

u est donc stationnaire d'ordre deux en x ; il signale aussi que « le fait que la covariance dépend de la somme $y'+y''$ provient de ce que les intégrales de l'équation de Laplace dans le demi-plan $y>0$ sont données par un semi-groupe d'opérations linéaires. »

C'est un problème bien différent qu'il aborde dans l'exposé qu'il donne à Lille en juin 1955 au 80ᵉ Congrès des Sociétés Savantes, publié sous le titre

Fonctions aléatoires harmoniques dans le cercle unité [137]

Après avoir situé ce problème dans le cadre général de la solution d'une équation aux dérivées partielles, prenant sur la frontière B d'un domaine D une valeur donnée $f(Q)$ lorsque celle-ci n'est pas rigoureusement connue par suite d'erreurs de mesures donc est une fonction aléatoire, il étudie à titre d'exemple le cas d'une fonction harmonique dans le cercle unité définie par l'intégrale de Poisson-Stieltjes.

$$u(P,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)}\,\mathrm{d}\nu_\omega(\varphi)\ ;$$

dans cette expression, $\nu_\omega(E)$ est, pour chaque $\omega\in\Omega$, une mesure finie sur la tribu $\mathcal{B}$ de parties du cercle unité engendrée par les arcs, telle que, pour chaque élément E de la tribu $\mathcal{B}$, $\nu_\omega(E)$ soit μ-mesurable (μ étant une probabilité sur une tribu $\mathcal{F}$ de parties de Ω).

Il établit que, pour tout point P intérieur au cercle unité, $u(P,\omega)$ définit une fonction μ-mesurable, u étant pour chaque ω la seule fonction harmonique non négative telle que pour chaque arc $J_{\alpha\beta} = \{P; r = 1 \quad 0 \leq \alpha \leq \theta < \beta \leq 2\pi\}$

$$\lim_{r\uparrow 1} \int_\alpha^\beta u(P,\omega)\,\mathrm{d}\theta = \nu_\omega(J_{\alpha\beta})\,.$$

Il cite en particulier le cas d'une suite $\{m_n\,;\, n \geq 1\}$ de masses positives fixées, de somme 1, réparties au hasard uniformément et indépendamment sur le cercle unité.

Il indique aussi que les résultats obtenus se généralisent au cas de fonctions harmoniques aléatoires égales à l'intérieur du cercle unité à la différence de deux fonctions harmoniques non négatives, la mesure aléatoire sur le cercle unité étant remplacée par une mesure aléatoire signée finie. C'est le point de départ de la communication qu'il présente en 1955 au « Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability » publiée sous le titre

Random solutions of partial differential equations [139]

Après avoir repris ses résultats antérieurs en les transposant au cas d'une mesure aléatoire signée finie, il se place dans le cas particulier où les conditions aux limites sur le cercle unité sont exprimées par une fonction aléatoire $f_\omega(\alpha)$, supposée $m \otimes \mu$ mesurable et telle que pour tout α, $f_\omega(\alpha)$ soit de carré μ-intégrable.

Il note $\gamma(\alpha,\beta) = E[f_\omega(\alpha)f_\omega(\beta)]$ et suppose $\gamma(\alpha,\alpha)$ m-intégrable sur C ; ceci lui permet de définir presque sûrement la mesure signée aléatoire $\nu_\omega(E) = \int_E f_\omega(\alpha)\,\mathrm{d}m(\alpha)$ et $u_\omega(P)$, fonction aléatoire harmonique, définie par l'intégrale de Poisson-Stieltjes associée à ν_ω, telle que, presque sûrement, pour presque tout θ :

$$\lim_{r\uparrow 1} u_\omega(P) = f_\omega(\theta)\,.$$

Notant $F(\alpha)$ la valeur moyenne de $f_\omega(\alpha)$, $U(P)$ celle de $u_\omega(P)$ et $\Gamma(P,Q)$ celle de $u_\omega(P)u_\omega(Q)$, il obtient par calculs élémentaires pour P et Q intérieurs au cercle unité les résultats suivants :

$$\begin{aligned} U(P) &= \int_0^{2\pi} k(r,\theta-\alpha)F(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \\ \Gamma(P,Q) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} k(r,\theta-\alpha)k(s,\psi-\beta)\gamma(\alpha,\beta)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta \end{aligned}$$

où

$$k(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta} \quad \text{(noyau de Poisson).}$$

U est donc harmonique et Γ l'est aussi par rapport à chacun des points P et Q ; U est l'unique fonction harmonique telle que $\lim\limits_{r\uparrow 1} U(P) = F(\theta)$ pour presque tout θ et Γ l'unique fonction harmonique en P pour Q fixé et en Q pour P fixé telle que $\lim\limits_{r\uparrow 1 s\uparrow 1} \Gamma(P,Q) = \gamma(\alpha,\beta)$ pour presque tout θ et ψ.

En outre, si $f_\omega(\alpha)$ est une fonction aléatoire normale centrée pour chaque valeur de α, il en est de même de $u_\omega(P)$ d'où une expression simple de son espérance conditionnelle pour une valeur initiale donnée $f_\omega(\alpha_1)$ en un point A_1 du cercle. Lorsque $f_\omega(\alpha)$ est stationnaire d'ordre deux, de covariance $\gamma(\alpha,\beta) = g(\alpha-\beta)$, il note $G(P)$ l'unique fonction harmonique à l'intérieur du cercle unité telle que, pour presque tout θ, $\lim\limits_{r\uparrow 1} G(P) = g(\theta)$ soit :

$$G(P) = G(r,\theta) = \int_0^{2\pi} k(r,\theta-\alpha) g(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$$

d'où :

$$\Gamma(P,Q) = G(rs,\theta-\psi)\,.$$

Posant $\rho = \log 1/r$ et $\sigma = \mathrm{Log}\, 1/s$, $u_\omega(P)$ est fonction exponentiellement convexe de ρ.

Cette communication comportait aussi un deuxième exemple d'intégrale aléatoire se rapportant à l'équation de la chaleur ; c'était l'un de ses thèmes privilégiés qui va maintenant être étudié.

4.6 Intégrales aléatoires de l'équation de la chaleur et de l'équation de la diffusion.

Travaux consacrés à l'équation de la chaleur

À plusieurs reprises, notamment en 1931–1932, Joseph Kampé de Fériet avait consacré le cours d'Analyse Supérieure de la Faculté des Sciences de Lille à la théorie de l'équation de la chaleur. Après avoir souligné l'utilisation des polynômes d'Hermite, il donnait des développements considérables à la représentation des intégrales périodiques en x, consacrant de longs développements en cette occasion à la théorie des fonctions $\Theta(x,t)$ de Jacobi.

Ultérieurement, il s'aperçut que l'équation de la chaleur fournissait un moyen d'obtenir certains renseignements sur les intégrales des équations de Navier ; en effet, celles-ci se réduisent à l'équation de la chaleur lorsque le fluide se décompose en plans parallèles glissant les uns sur les autres (« shear flow ») ce qui s'exprime pour les composantes u, v, w de la vitesse par $u = u(y,t)$, $v = w = 0$, la pression p étant constante $p = p_0$. Comme on l'a déjà vu ceci l'amènera à utiliser l'équation de la chaleur pour tester la non-existence de propriétés vérifiées par les solutions des équations de Navier (cf. ses publications [121] et [154] déjà citées).

Ceci le conduisit à ne pas se contenter d'appliquer les résultats obtenus par A. Tychonoff, D.V. Widder, S. Bochner et K. Chandrasekharan, J.L.B. Cooper ; il consacra une certaine attention pour obtenir des théorèmes d'unicité d'un type varié utilisant des représentations liées soit à l'intégrale de Poisson, soit à des développements en séries de polynômes d'Hermite ou en séries de Fourier.

En particulier, il avait remarqué que l'intégrale de Poisson

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y,t) f(y)\,\mathrm{d}y \quad (\text{où} \quad k(x,t) = (4\pi t)^{-1/2} \exp\bigl(-\frac{x^2}{4t}\bigr)$$

noyau de Poisson) représente dans le demi-plan

$$D = \{(x,t)\,;\, x \text{ réel } t > 0\}$$

une intégrale de l'équation de la chaleur prenant pour $t = 0$ la valeur $f(x)$ lorsque f appartient à certaines classes convenablement choisies, en particulier dans le cas des espaces L^1 et L^2 qui ont fait l'objet de développements dus en particulier à S. Bochner et K. Chandrasekharan.

Il consacre quelques travaux (cf. ses publications [116] et [124]) à cet aspect, obtenant en particulier le théorème d'unicité suivant :
« Si $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, l'intégrale de Poisson est la seule fonction vérifiant les conditions :

a) $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ existent en tout point de D et y sont égales.

b) Soit $\varphi(x,t)$ leur valeur commune :

$$|\varphi(x,t)| < +\infty \quad \text{dans} \quad D \quad \text{et} \quad \int_B |\varphi(x,t)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t < +\infty$$

pour toute bande B de la forme

$$B = \{(x,t)\,;\, x \quad \text{réel} \quad 0 < \theta_1 \le t \le \theta_2 < +\infty\}\,.$$

c) $\int_{\mathbb{R}} |u(x,t)|\,dx < +\infty$ pour tout $t > 0$.

d) $\lim\limits_{t \to +0} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |u(x,t) - f(x)|\,dx = 0.$ »

Ces conditions ne portant que sur l'intégrabilité affaiblissaient celles données par S. Bochner et K. Chandrasekharan et lui paraissaient un avantage pour les applications à la Mécanique des Fluides.

Cependant ces hypothèses d'intégrabilité imposaient à $f(x)$ de tendre vers 0 en moyenne à l'infini, ce qui revenait à exclure de nombreuses classes de fonctions dont les fonctions presque périodiques et plus généralement des fonctions fluctuant autour d'une valeur constante non nulle. Norbert Wiener attira son attention sur la classe S de fonctions qu'il avait introduites dans son analyse harmonique généralisée. La contribution qu'y a apportée Joseph Kampé de Fériet a déjà été soulignée et ceci l'a amené à étudier l'intégrale de Poisson lorsque f appartient à la classe S donc est de carré intégrable sur tout intervalle fini et telle que pour tout h réel :

$$\rho(h \mid f) = \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{+A} f(x+h)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

existe, ρ étant de plus continue pour $h = 0$. ρ définissant l'autocorrélation de f vérifie pour tout h réel

$$\rho(h \mid f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ih\lambda)\,\mathrm{d}S(\lambda \mid f)$$

la fonction S dite spectre de f est à valeurs réelles et non décroissante.

Dans une Note aux *Comptes rendus* du 26 mai 1952.

Sur une classe de solutions de l'équation de la chaleur [117]

il énoncera les résultats suivants :

a) Si f appartient à la classe S, l'intégrale de Poisson existe et représente pour $t > 0$ une fonction continue, pourvue de dérivées de tous ordres dans le demi-plan
$$P = \{(x,t)\,;\, x \text{ réel et } t > 0\}\,.$$

b) La fonction u ainsi obtenue satisfait à l'équation de la chaleur dans le demi-plan P.

c) Pour chaque $t > 0$, u appartient à la classe S.

d) $\lim\limits_{t \downarrow +0} u(x,t) = f(x)$ pour presque tout x.

e) L'autocorrélation de u pour $t > 0$ notée $\rho(h \mid u(x,t))$ vérifie
$$\rho(h \mid u(x,t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y, 2t)\rho(y \mid f)\,\mathrm{d}y\,,$$
c'est donc l'unique solution de l'équation
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 2\frac{\partial^2\rho}{\partial h^2}$$

bornée dans $t > 0$, égale pour $t = 0$ à $\rho(h \mid f)$.

Son spectre $S(\lambda \mid u(x,t))$ est donné pour tout $t > 0$ par

$$S(\lambda \mid u(x,t) = \int_{-\infty}^{\lambda} \exp(-2\xi^2 t)\,\mathrm{d}S(\xi \mid f)\,,$$

il est aussi précisé que ce spectre est absolument continu pour $t > 0$ si et seulement si $S(\lambda \mid f)$ l'est.

Ce résultat avait attiré l'attention de Jacques Hadamard et il demanda à Joseph Kampé de Fériet de rédiger une Note qu'il désirait joindre en annexe à un ouvrage sur l'équation de la chaleur qu'il ne put cependant publier.

Ces résultats furent exposés dans le cours que Joseph Kampé de Fériet donna en 1951 à l'Université de Maryland (cf. ses publications [111] et [112]). Leur démonstration fut donnée dans la monographie [189] consacrée à l'équation de la chaleur :

Cette publication parue en avril 1967 était le fruit d'exposés donnés en octobre 1966 au Département de Mathématiques Appliquées de l'Indian Institute of Bangalore.

Outre les résultats classiques relatifs à l'équation de la chaleur, on y trouve aussi des résultats obtenus lorsque f est périodique de période 2π et étant soit intégrable sur $[-\pi, +\pi]$ soit continue et de variation bornée sur cet intervalle. Le lien entre l'équation de la chaleur et les polynômes d'Hermite était aussi rappelé ; il y avait consacré auparavant ses publications [160] et [161].

Dans cette dernière intitulée *Equation de la chaleur et polynômes d'Hermite* il rappelait d'abord qu'Hermite avait noté dès 1864 que le polynôme $K_n(x,t) = (i\sqrt{2t})^n H_n\big(\frac{x}{i\sqrt{2t}}\big)$ (H_n : n-ième polynôme d'Hermite) était une intégrale de l'équation de la chaleur.

Il remarquait ensuite que l'application $T_t : x^n \to K_n(x,t)$ permet de définir un groupe abélien de transformations opérant dans l'espace vectoriel $\mathcal{P}$ des polynômes en x à cœfficients réels et il proposait de prolonger T_t à un espace vectoriel topologique $\mathcal{F}$ où $\mathcal{P}$ serait dense ce qui fournirait une classe de solutions de l'équation de la chaleur.

Il étudiait notamment ce prolongement à l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ des fonctions entières (à cœfficients réels) $f(x) = \sum_0^\infty A_n x^n$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} |A_n|^{1/n} = 0$ et aussi à son sous-espace $\mathcal{F}_\tau$ $(0 < \tau \leq +\infty)$ des fonctions f telles que $\limsup\limits_{n\to+\infty} \left|\sqrt{n}A_n\right|^{1/n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2\tau}}$.

Dans ce dernier cas, si f appartient à $\mathcal{F}_\tau$, la fonction $u(x,t)$ définie par :

$$u(x,t) = \sum_0^\infty A_n K_n(x,t) = T_t f(x)$$

est une intégrale régulière de l'équation de la chaleur dans la bande $|t| < \tau$ et il notait qu'il n'était pas possible en général d'étendre ce domaine d'existence.

Il convient aussi de souligner le lien qu'il a établi avec les développements de Gram-Charlier de certaines densités de probabilité.

Développements de Gram-Charlier (publications [186] et [211])

L'origine de cette recherche remonte au séjour que Joseph Kampé de Fériet fit en 1963 au laboratoire de Mathématiques Appliquées du David Taylor Model Basin (D.T.M.B.) de la marine américaine à Washington, animé par l'un de ses anciens élèves, François N. Frenkiel.

Le travail qu'ils effectuèrent fut complété en 1964–1965 lors du séjour qu'il effectua à l'Université Catholique de Washington sur invitation d'Eugen Lukacs et il donna lieu à une publication parue en mars 1966 *The Gram-Charlier approximation of the normal law and the statistical description of a homogeneous flow near statistical equilibrium* [186].

Ce travail fut ensuite approfondi en 1972 dans sa publication [211] : *Sur une loi de probabilité du champ des vitesses d'un fluide dans un état voisin de* *l'équilibre statistique,* fruit d'une conférence donnée le 26 avril 1971 à l'Instituto Nazionale di alta matematica de l'Université de Bologne qui lui avait décerné son titre de Docteur Honoris Causa le 2 septembre 1961.

Ces deux publications se situent bien dans la ligne de ses recherches sur la mécanique statistique de la turbulence homogène ; elles s'appuient sur le fait que les raisonnements qui conduisirent Gibbs à choisir la loi normale en tant que loi maximisant l'entropie en mécanique statistique classique étaient en général inapplicables aux fluides visqueux car le système étudié était non conservatif donc non en équilibre statistique. Néanmoins, pour des états du système proches de l'équilibre, il était opportun de rechercher une loi simple possédant des propriétés voisines de celles de la loi normale.

Joseph Kampé de Fériet rappelait d'abord l'expression du développement de Gram - Charlier pour une variable aléatoire X de densité $p(x)$, de moyenne m et de variance σ^2, sa densité s'écrivant sous la forme du développement en série de polynômes d'Hermite

$$p(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\Big(\frac{x-m}{\sigma}\Big)\sum_0^\infty A_n H_n\Big(\frac{x-m}{\sigma}\Big)$$

où $\varphi(x)$ est la densité de la loi normale réduite et les cœfficients A_n sont définis par :

$$A_0 = 1 \quad A_1 = A_2 = 0 \quad \text{et, si} \quad n \geq 3, \quad A_n = \frac{1}{n!}E\Big(H_n\Big(\frac{X-m}{\sigma}\Big)\Big)$$

L'écriture de $\sigma p(m+\sigma x)$ n'est donc rien d'autre que le développement de Fourier-Hermite de la densité de la variable réduite $Y = (X-m)/\sigma$.

Après avoir rappelé un théorème d'Harald Cramér qui donnait une condition suffisante de validité de ce développement, il proposait une extension à un couple (X,Y) de variables aléatoires réelles pourvues de moments de tous ordres définis par $EX = m$, $EY = n$, $E((X-m)^j)(Y-n)^k) = \mu_{jk}$ avec $\mu_{20} = \sigma^2 > 0$, $\mu_{0,2} = \tau^2 > 0$ et $\mu_{1,1} = r\sigma\tau$ avec $|r| < 1$.

Écartant une représentation proposée par certains auteurs de la forme

$$\frac{1}{\sigma\tau}\varphi\Big(\frac{x-m}{\sigma}\Big)\varphi\Big(\frac{y-n}{\tau}\Big)\sum_{\ell,p=0}^\infty A_{\ell,p}H_\ell\Big(\frac{x-m}{\sigma}\Big)H_p\Big(\frac{y-n}{\tau}\Big)$$

qui lui paraissait trop proche du cas où X et Y seraient indépendantes, il proposait d'utiliser les polynômes à deux variables introduits en 1864 par Hermite, généralisés par Paul Appell et lui-même dans leur traité de 1926. Ces polynômes sont, comme on l'a déjà vu, définis comme suit : si $\varphi(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ où $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$ et si son adjointe notée $\psi(\xi,\eta)$ est définie par :

$$\psi(\xi,\eta) = \frac{1}{ac-b^2}(c\xi^2 - 2b\xi\eta + a\eta^2)$$

on introduit le système biorthogonal $H_{m,n}(x,y)$ et $G_{m,n}(x,y)$ avec $m \geq 0$ et $n \geq 0$ par les deux égalités suivantes :

$$\exp\big(h(ax+by)+k(bx+cy)-\frac{1}{2}\varphi(h,k)\big) = \sum_{m,n=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!}\frac{k^n}{n!}H_{m,n}(x,y)$$
$$\exp\big((hx+ky)-\frac{1}{2}\psi(x,y)\big) = \sum_{m,n=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!}\frac{k^n}{n!}G_{m,n}(x,y)$$

Si

$$p_0(x,y) = (2\pi\sigma\tau\sqrt{1-r^2})^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{2}\phi(\frac{x-m}{\sigma},\frac{y-n}{\tau})\Big)$$

où $\phi(x,y) = (1-r^2)^{-1}(x^2-2rxy+y^2)$ (densité de la loi normale à 2 variables), Joseph Kampé de Fériet et François N. Frenkiel proposaient d'utiliser le développement de Gram-Charlier de la densité $p(x,y)$ du couple (X,Y) sous la forme suivante :

$$p(x,y) \quad = \quad p_0(x,y)\sum_{m,n=0}^{+\infty} A_{m,n}H_{m,n}\Big(\frac{x-m}{\sigma},\frac{y-n}{\tau}\Big)$$

où

$$A_{m,n} \quad = \quad \frac{1}{m!n!}E\Big(G_{m,n}\Big(\frac{X-m}{\sigma},\frac{Y-n}{\tau}\Big)\Big)$$

d'où, en particulier, $A_{0,0} = 1$ et $A_{m,n} = 0$ si $0 < m+n \leq 2$, les $A_{m,n}$ s'exprimant sous forme de combinaisons linéaires des cœfficients μ_{jk}.

La seconde publication de 1972 étudie le cas plus général d'un vecteur aléatoiree $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ pourvu de moments de tous ordres, de matrice des covariances non dégénérée, les moments d'ordre un et deux étant notés :

$$EX_j = m_j \ (j = 1,2,\ldots,n), \quad E\left[(X_j-m_j)(X_k-m_k)\right] = r_{jk}\sigma_j\sigma_k$$
$$E(X_j-m_j)^2 = \sigma_j^2, j = 1,2,\ldots,n$$

R désignant la matrice des corrélations $R = (r_{jk})$ d'inverse $R^{-1} = (R_{jk})$ les polynômes d'Hermite généralisés ont été définis par Paul Appell et Joseph Kampé de Fériet. En notant :

$$\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n) \quad = \quad \sum_{j,k=1}^{n} R_{jk}x_jx_k \quad \text{et}$$
$$\Psi(u_1,u_2,\ldots,u_n) \quad = \quad \sum_{j,k=1}^{n} r_{jk}u_ju_k$$

on définit le système biorthogonal de polynômes $H_{m_1\ldots m_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ et

$G_{m_1\dots m_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ par les deux égalités :

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\varphi(x_1 - h_1, \dots, x_n - h_n)\right\}$$
$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\varphi(x_1, \dots, x_n)\right) \sum_{m_1,\dots,m_n} \frac{h_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{h_n^{m_n}}{m_n!} H_{m_1,\dots,m_n}(x_1, \dots, x_n)\,;$$
$$\exp\left\{k_1 x_1 \cdots + k_n x_n - \frac{1}{2}\Psi(k_1, \dots, k_n)\right\}$$
$$= \sum_{m_1,\dots,m_n} \frac{k_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{k_n^{m_n}}{m_n!} G_{m_1,\dots,m_n}(x_1, \dots, x_n)\,.$$

Ceci conduisit Joseph Kampé de Fériet à introduire la définition suivante : un vecteur $(X_1, \dots X_n)$ appartient à la classe de Gram-Charlier si le vecteur aléatoire $(Y_1, \dots Y_n)$ où $Y_j = \frac{X_j - m_j}{\sigma_j}$, $j = 1, 2, \dots, n$ a une densité définie par la série :

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = (2\pi)^{-n/2}(\text{dét}R)^{-1/2}$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)\right\} \sum_{m_1,\dots,m_n} A_{m_1,\dots,m_n} H_{m_1,\dots,m_n}(x_1, \dots, x_n)$$

où les cœfficients $A_{m_1,\dots,m_n}$ vérifient les conditions suivantes : $A_{o,o,\dots,o} = 1$ $A_{m_1\dots,m_n} = 0$ pour $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = 1$ ou 2 et

$$\limsup_{m_1+m_2+\cdots+m_n\to+\infty} \left|\sqrt{m_1!}\dots\sqrt{m_n!}A_{m_1,\dots,m_n}\right|^{1/(m_1+\cdots+m_n)} < 1$$

cette condition garantissant la convergence absolue et uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}^n$ de la série définissant la densité qui est en outre une fonction entière de $(x_1, \dots, x_n)$.

De manière générale, les cœfficients $A_{m_1,\dots,m_n}$ s'expriment à l'aide des polynômes d'Hermite par l'égalité :

$$A_{m_1,\dots,m_n} = \frac{1}{m_1!m_2!\dots m_n!} E\Big(G_{m_1,\dots,m_n}(Y_1, \dots, Y_n)\Big)$$

et sont donc des combinaisons linéaires des moments.

De même, la fonction caractéristique du vecteur réduit $(Y_1, \dots, Y_n)$ s'exprime simplement par :

$$E\Big(\exp(i(u_1Y_1 + \cdots + u_nY_n)\Big) =$$
$$\exp\left(-\frac{1}{2}\Psi(u_1, u_2, \cdots, u_n)\right) \sum_{m_1,\cdots,m_n=0}^{\infty} A_{m_1,\dots,m_n}(iu_1)^{m_1}\dots(iu_n)^{m_n}\ ;$$

c'est une fonction entière de $u_1, u_2, \dots, u_n$, d'ordre inférieur ou égal à 2. Joseph Kampé de Fériet énonce alors à titre d'hypothèses les trois propriétés suivantes qui lui apparaissent comme une généralisation de celles obtenues pour les vecteurs gaussiens :

1. Toutes les marges d'un vecteur aléatoire appartenant à la classe de Gram-Charlier appartiennent aussi à cette classe.
2. Si deux vecteurs aléatoires indépendants, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, appartiennent à la classe de Gram-Charlier, il en est de même de leur somme.
3. Si un vecteur aléatoire appartient à la classe de Gram-Charlier, il en est de même de tout vecteur qui s'en déduit par rotation.

Il établit d'ailleurs explicitement le second résultat dans le cas de deux variables aléatoires réelles indépendantes comme conséquence du résultat élémentaire suivant :

si

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\sqrt{n!}A_n\right|^{1/n}=\lambda_1 \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty}\left|\sqrt{n!}B_n\right|^{1/n}=\lambda_2$$

et si

$$C_n=\sum_{k=0}^{n}A_kB_{n-k}, \quad \text{alors} \quad \limsup_{n\to\infty}\left|\sqrt{n!}C_n\right|^{1/n}\leq\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\,,$$

ce résultat étant lui-même conséquence immédiate de l'inégalité élémentaire suivante :

$$n!\left|C_n\right|^2\leq\sum_{k=0}^{n}k!n-k!\frac{\left|A_k\right|^2}{\lambda_1^{2k}}\frac{\left|B_{n-k}\right|^2}{\lambda_2^{2n-2k}}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)^n\,.$$

Dans le cas d'une variable aléatoire réelle, après avoir rappelé certains résultats d'Harald Cramér et de Niels Nielsen relatifs à la convergence des séries de Fourier-Hermite, il y apporte un éclairage tout à fait nouveau en soulignant le lien entre ces développements et ceux relatifs à l'équation de la chaleur. Introduisant la fonction d'Appell $k(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4t}\right\}$ où $t>0$ et la fonction $W_n(x,t)$ solution de l'équation de la chaleur définie par $W_n(x,t)=k(x,t)\left(\frac{t}{2}\right)^{-n}H_n\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$ il remarque d'abord que si $P(x,t)=\sum_0^\infty\frac{A_n}{2^n}W_n(x,t)$ et si $\limsup_{n\to+\infty}\left|\sqrt{n!}A_n\right|^{1/n}=\sqrt{\frac{2}{\tau}}$ avec $\tau>0$, alors $P(x,t)$ est somme d'une série absolument et uniformément convergente sur tout compact inclus dans la bande $B_\tau=\left\{(x,t),t>\frac{1}{\tau}\right\}$, c'est une intégrale analytique de l'équation de la chaleur dans la bande B_τ, fonction entière en x sur toute droite $t=t_0>\frac{1}{\tau}$. Or, $P\left(x,\frac{1}{2}\right)$ n'est autre que le développement de Gram-Charlier si $\tau>2$. De plus, la transformée de Fourier de $P(x,t)$ n'est autre que : $\Phi(u,t)=\exp(-tu^2)g(u)$ si $t>\frac{1}{\tau}$ avec $g(u)=\sum_0^\infty A_n(iu)^n$.

Il en résulte que si $\tau>2$, la série de Gram-Charlier est absolument et uniformément convergente sur tout compact.

Après avoir souligné que des conditions supplémentaires sont à imposer aux A_n pour garantir que le développement de Gram-Charlier ait une somme positive, il conclut en mettant en évidence les deux points suivants :

1. Si X_1 et X_2 sont indépendantes et si X_1 est normale, $X_1 + X_2$ peut être de Gram-Charlier même si X_2 ne l'est pas.

2. Lorsque X est de Gram-Charlier, il n'est pas toujours possible de le décomposer sous la forme précédente avec X_1 normale.

Il souligne enfin l'intérêt que présenterait une étude plus approfondie des développements de Gram-Charlier d'ordre supérieur à un et en particulier d'établir leur lien avec les solutions de l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^n$ en s'appuyant sur les résultats de D.V. Widder.

Intégrales aléatoires de l'équation de la chaleur

Notations :

$k(x,t) = (4\pi t)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{x^2}{4t}\right\}$, x réel, $t > 0$, noyau de Poisson.

$D = \{(x,t)\,;\, x \text{ réel}, t > 0\}$.

$B(\tau) = \{(x,t)\,;\, x \text{ réel}, O < t < \tau \leq +\infty\}$.

m mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ espace de probabilité.

Équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Joseph Kampé de Fériet a consacré trois publications à l'équation de la chaleur lorsque la température initiale est une fonction aléatoire qu'il note $f(x,\omega)$ ou $f_\omega(x)$ et qu'il suppose définie sur l'espace produit $\mathbb{R} \times \Omega$, $m \otimes \mu$ mesurable.

Il note $u(x,t,\omega)$ la solution aléatoire de l'équation de la chaleur définie par l'intégrale de Poisson

$$u(x,t,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-\xi,t) f(\xi,\omega)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Dans *L'intégration de l'équation de la chaleur pour des données initiales aléatoires* [128], parue en 1954, il suppose que la température initiale est une fonction aléatoire stationnaire en x, de moyenne nulle et de corrélation $r(x)$. Des propriétés connues de l'équation de la chaleur, il en déduit que, presque sûrement, $u(x,t,\omega)$ définit sur D une fonction aléatoire pourvue de dérivées continues de tous ordres en x et t, solution de l'équation de la chaleur dans D, telle que pour presque tout x : $\lim\limits_{t\downarrow 0} u(x,t,\omega) = f(x,\omega)$, égalité vraie pour tout x si la corrélation r est continue en $x = 0$ c'est-à-dire si f est continue en moyenne quadratique.

De plus, u est de moyenne nulle, de covariance

$$E(u(x,t,\omega)u(y,s,\omega)) = \rho(x-y,t+s)$$

où

$$\rho(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-\xi,t) r(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,;$$

c'est donc une fonction stationnaire d'ordre deux en x, exponentiellement convexe au sens de Loeve en t, cette dernière propriété résultant du fait bien connu que si l'on note $u(x,t) = T_t f(x)$, les transformations T_t constituent un semi-groupe additif $T_t \circ T_s = T_{t+s}$.

La corrélation ρ de u est aussi solution de l'équation de la chaleur telle que $\lim\limits_{t\downarrow 0} \rho(x,t) = r(x)$ pour presque tout x, cette propriété étant vraie pour tout x si r est continue en $x = 0$. Dans ce dernier cas, r est représentée par l'intégrale de Stieltjes

$$r(x) = \int_0^\infty \cos\ \lambda x\ \mathrm{d}\mathcal{F}(\lambda) \quad \text{où} \quad \mathcal{F} \quad \text{non décroissante}$$

et alors

$$\rho(x,t) = \int_0^\infty \exp(-\lambda^2 t) \cos\ \lambda x\ \mathrm{d}\mathcal{F}(\lambda)\,.$$

Ceci permit à Joseph Kampé de Fériet d'établir que lorsque $t \to +\infty$, $u(x,t,\omega)$ tend en moyenne quadratique vers une variable aléatoire réelle Y, de moyenne nulle, de variance $\mathcal{F}(+0)$, telle que

$$\lim_{t\to+\infty} E(u(x,t,\omega)u(y,s,\omega)) = E(Y(\omega)u(y,s,\omega)) = \mathcal{F}(+0).$$

Dans deux publications ultérieures parues en 1955 :

Intégrales aléatoires de l'équation de la chaleur dans une barre infinie [136]
Random solutions of partial differential equations [139]

il reprenait le problème de manière plus générale en supposant que la fonction aléatoire $f(x,\omega)$ appartient à l'espace de Banach $L^p(\alpha)$ qu'il définit comme suit pour $\alpha(x) \geq 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad M^p(x) = \int_\Omega |f(x,\omega)|^p \,\mathrm{d}\mu(\omega) < +\infty \quad \text{et}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} M^p(x)\alpha(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

en étudiant les deux cas suivants :

$$\alpha(x) = \exp(-ax^2) \quad \text{pour un} \quad a \geq 0$$

et

$$\alpha(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Dans le premier cas, presque sûrement, la fonction aléatoire $u(x,t,\omega)$ définie par l'intégrale de Poisson est solution de l'équation de la chaleur dans la bande $B\big(\frac{1}{4a}\big)$ et telle que, pour presque tout x, $\lim\limits_{t\downarrow 0} u(x,t,\omega) = f(x,\omega)$.

Notant si p entier $\gamma^p(x_1,x_2,\ldots,x_p) = E[f(x_1,\omega)f(x_2,\omega)\cdots f(x_p,\omega)]$ et $\Gamma^p(x_1,x_2,\ldots,x_p,t_1,t_2,\ldots,t_p) = E[u(x_1,t_1,\omega)u(x_2,t_2,\omega),\ldots,u(x_p,t_p,\omega)]$ il remarque que le second moment d'ordre p est lié au premier par la relation :

$$\Gamma^p(x_1,x_2,\ldots,x_p,t_1,t_2,\ldots,t_p) = \int_{\mathbb{R}^p} k(x_1-y_1,t_1)\ldots k(x_p-y_p,t_p)\gamma^p(y_1,\ldots,y_p)\,\mathrm{d}y_1\ldots\mathrm{d}y_p$$

d'où résulte que pour chaque couple (x_j,t_j), $j=1,2,\ldots,p$, Γ^p est solution de l'équation de la chaleur dans le bande $B\big(\frac{1}{4a}\big)$.

En remplaçant $B\big(\frac{1}{4a}\big)$ par D, tous ces résultats demeurent valables si l'on choisit $\alpha(x) = (1+x^2)^{-1}$.

Il note aussi que ce second choix plus restrictif mais qui inclut le cas stationnaire de sa première publication offre aussi l'avantage de faire apparaître la propriété de semi-groupe évoquée dans sa première publication.

En effet, si l'on désigne respectivement par

$$\mathcal{A}_a^p = \left\{g; \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^p \exp(-ax^2)\,\mathrm{d}x < +\infty\right\} \quad a \geq 0$$

et

$$\mathcal{B}^p = \left\{g; \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^p \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} < +\infty\right\}$$

il signale que si f appartient à l'espace de Banach $\mathcal{A}_a^p$, la fonction $u(x,t)$ qui en résulte par l'intégrale de Poisson n'appartient pas à l'espace de Banach $\mathcal{A}_a^p$ pour $t > 0$ sauf si $a = 0$ tandis que si f appartient à $\mathcal{B}^p$, il en est de même de $u(x,t)$ ce qui permet de noter $u(x,t) = T_t f(x)$ les T_t constituant un semi-groupe fortement continu.

Ceci lui permet alors en désignant par $\phi : \Omega \to \mathcal{B}^p$ qui à $\omega \mapsto f(x,\omega)$ et par, λ la probabilité image de μ par ϕ de ne traiter le problème que sur l'espace de Banach $\mathcal{B}^p$.

Intégrales aléatoires de l'équation de la diffusion [144]

Dans cette Note aux *Comptes rendus* parue le 1er Octobre 1956, Joseph Kampé de Fériet étudie les propriétés statistiques des intégrales de l'équation de la diffusion dans un fluide se mouvant par tranches parallèles.

Notant t le temps, x l'abscisse de la tranche, $s(x,t)$ la concentration de la matière diffusée, $u(x,t)$ la vitesse du fluide et supposant par un choix convenable des unités que le cœfficient constant de diffusion moléculaire est égal à 1, s vérifie l'équation :

$$\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}(us)\,.$$

Joseph Kampé de Fériet rappelle que cette équation se ramène à celle de la chaleur si u est constante en posant :

$$s(x,t) = S(x,t)\exp\left(\frac{ux}{2} - \frac{u^2 t}{4}\right)$$

et ceci lui permet d'étudier les solutions aléatoires de l'équation de la diffusion en supposant que u est une variable aléatoire. Il note $f(x) = s(x,0)$ la concentration initiale supposée positive et telle que pour un $c \geq 0$, $\exp(-cx^2)f(x)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$ et il remarque que l'intégrale

$$s(x,t,u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{\frac{u}{2}(x-\xi)\right\} k(x-\xi,t)\exp\Big(-\frac{u^2 t}{4}\Big) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

définit une solution de l'équation de la diffusion dans la bande
$B = \big\{(x,t)\,;\, x \text{ réel } 0 < t < \frac{1}{4c}\big\}$ telle que : $\lim\limits_{t\downarrow 0} s(x,t,u) = f(x)$ pour presque tout x.

Notant $\mathcal{F}(\alpha) = P\{u < 2\alpha\}$, il établit que $s(x,t,u)$ définit dans $B \times \Omega$ une fonction aléatoire de valeur moyenne

$$\bar{s}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-\xi,t)k(x-\xi,t)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

où

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\alpha x - \alpha^2 t)\,\mathrm{d}\mathcal{F}(\alpha) \quad (x,t) \in D = \mathbb{R}\times]0,+\infty[\,.$$

Considérant le cas particulier où u est une variable aléatoire normale centrée, de variance σ^2 et supposant $c > 0$, il remarque qu'en général $\bar{s}$ n'est définie que dans une bande B_1 strictement incluse dans B et *en déduit que, contrairement à ce qui est souvent supposé, l'existence d'un mouvement aléatoire dans un domaine ne garantit pas ipso-facto celle d'un mouvement moyen dans le même domaine.*

4.7 Mécanique statistique des ondes de gravité à deux dimensions

L'origine de cette recherche remonte à une Note aux *Comptes rendus* présentée le 16 juillet 1952 par Joseph Kampé de Fériet et Jack Kotik de l'Université de Harvard sous le titre :

Sur les ondes de pesanteur à deux dimensions d'énergie finie [119]

Le contenu de cette Note fut développé en juillet 1953 dans un travail réalisé à l'Université de Harvard et qu'ils publièrent dans le *Journal of Rational Mechanics and Analysis* sous le titre :

Surface waves of finite energy [120]

Dans cette seconde publication, ils rappelaient que bon nombre de travaux avaient été consacrés à la théorie linéarisée des ondes de gravité dans un océan infini ou semi-infini contenant une certaine sorte d'obstacle et ils se proposaient d'aborder un problème différent qui leur paraissait avoir peu attiré l'attention (mis à part des travaux anciens dus à Poisson en 1816 et Cauchy en 1827 dans un cas particulier), le problème de la valeur initiale : si à l'instant $t = 0$, la surface libre du liquide a une forme donnée et si en dehors des forces de gravité, aucune force ne s'exerce, quel sera le mouvement subséquent ?

Dans leur Note aux *Comptes rendus*, ils définissaient ce problème comme suit : « Nous considérons le problème à deux dimensions d'un liquide pesant de profondeur infinie ; nous supposons donnée la forme initiale de la surface libre, le liquide étant abandonné sans vitesse initiale ; nous obtenons la solution dans le cas où l'énergie totale (par unité de longueur normale au plan du mouvement) est finie, en fournissant l'expression du potentiel des vitesses. »

Les notations qu'ils adoptaient étaient les suivantes ; le liquide occupant le demi-plan $(-\infty < x < +\infty, y \geq 0)$, ils notaient successivement $\bar{D}$, B et D les ensembles définis par :

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \{x, y, t \; ; \; -\infty < x < +\infty \; , \; y \geq 0 \; , \; -\infty < t < +\infty\} \\ B &= \{x, y, t \; ; \; -\infty < x < +\infty \; , \; y = 0 \; , \; -\infty < t < +\infty\} \\ D &= \{x, y, t \; ; \; -\infty < x < +\infty \; , \; y > 0 \; , \; -\infty < t < +\infty\} \end{aligned}$$

Le problème posé consistait à donner l'expression du potentiel des vitesses $\Phi(x, y, t)$, harmonique en x et y dans D, tel que : $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ dans D vérifiant les conditions initiales :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y, 0) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y, 0) = 0 \quad \text{dans} \quad D$$

et $\eta(x, 0) = F(x)$ où l'élévation $\eta(x, t) = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, 0, t)$, la dérivée partielle $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, y, t)$ étant supposée définie dans D.

La fonction F définissant l'élévation initiale était supposée paire, de carré intégrable sur $\mathbb{R}$, absolument continue, sa dérivée F' étant supposée de carré intégrable.

Introduisant la transformée de Fourier cosinus de F définie en moyenne quadratique par :

$$f(\lambda) = -\frac{2}{\pi} \underset{A\to\infty}{\text{l.e.m.}} \int_0^A \cos \lambda x \, F(x) \, \mathrm{d}x \,,$$

ils remarquaient que $f(\lambda)$ et $\lambda f(\lambda)$ étaient de carrés intégrables et que

$$F(x) = -\int_0^\infty \cos \lambda x \, f(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda$$

et ils prouvaient que l'unique solution du problème posé était fournie par l'intégrale

$$\Phi(x, y, t) = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda y) \frac{\sin(t\sqrt{\lambda})}{t\sqrt{\lambda}} \cos \lambda x \, f(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda$$

fonction continue dans $\bar{D}$, continûment dérivable en (x, y, t) dans D et même analytique en x et y dans ce domaine, l'élévation $\eta(x, t)$ étant donnée dans $\bar{D}$ par l'intégrale.

$$-\int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{\lambda} t) \cos \lambda x \, f(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda$$

d'où l'expression de l'énergie par unité de longueur normale au plan

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta^2(x, 0) \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty F^2(x) \, \mathrm{d}x$$

C'est sous cette forme que Joseph Kampé de Fériet reprendra le problème lors d'exposés donnés en Janvier – Février 1958 au Laboratoire de Mathématiques Appliquées du David Taylor Model Basin (D.T.M.B.) à Washington parus en avril 1958 sous la forme d'un rapport technique

Statistical Mechanics of two-dimensional gravity waves with finite energy [152]

Ce rapport suit de peu sa Note de 1957 :

Mesures de probabilité sur un espace de Hilbert séparable [148]

dont il reprend les résultats.

Il rappelle de nouveau que l'élaboration d'une mécanique statistique suppose le choix de l'espace fonctionnel utilisé Ω et d'une mesure de probabilité μ sur cet espace.

Dans le cas présent l'élément aléatoire est fourni par l'élévation initiale $F(x)$ ou vu les hypothèses faites, sa transformée de Fourier $f(\lambda)$ telle que $f(\lambda)$ et $\lambda f(\lambda)$ soient de carrés intégrables sur $[0, +\infty[$.

Il introduit donc l'élément aléatoire $\omega(\lambda)$ défini par $\omega(\lambda) = f(\lambda)$ sur $[0, 1]$, $\lambda f(\lambda)$ sur $[1, +\infty[$.

Chacune des intégrales intervenant dans le problème devient une fonctionnelle linéaire dans l'espace de Hilbert séparable $L^2[0,+\infty[$ d'où les expressions du potentiel des vitesses et de ses dérivées :

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y,t) &= \int_0^\infty G^{(1)}(\lambda,x,y,t)\omega(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \\
u(x,y,t) &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \int_0^\infty G^{(2)}(\lambda,x,y,t)\omega(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \\
v(x,y,t) &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \int_0^\infty G^{(3)}(\lambda,x,y,t)\omega(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \\
\eta(x,t) &= -\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,0,t) = \int_0^\infty G(\lambda,x,t)\omega(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
G^{(1)}(\lambda,x,y,t) &= \exp(-\lambda y)\frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}}\cos\lambda x \quad \text{si} \quad 0\le\lambda\le 1 \\
&= \frac{1}{\lambda}\exp(-\lambda y)\frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}}\cos\lambda x \quad \text{si} \quad 1\le\lambda<+\infty \\
G^{(2)}(\lambda,x,y,t) &= -\frac{\partial G^{(1)}}{\partial x}, \quad G^{(3)}(\lambda,x,y,t) = -\frac{\partial G^{(1)}}{\partial y} \\
G(\lambda,x,t) &= -\frac{\partial G^{(1)}}{\partial t}(\lambda,x,0,t)\,.
\end{aligned}$$

Le choix d'une base orthonormée $\{e_n(\lambda)\}$ de l'espace de Hilbert $L^2[0,+\infty[$ ramène le choix d'une mesure de probabilité sur cet espace à celui d'une mesure de probabilité sur l'espace ℓ^2 des suites $\{\xi_n\,;\,n\ge 1\}$ de nombres réels tels que $\sum_{n=1}^{+\infty}\xi_n^2<+\infty$ en posant $\xi_n=\int_0^\infty\omega(\lambda)e_n(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$.

Joseph Kampé de Fériet se réfère directement à sa Note de 1957 pour la construction d'une telle mesure qui est une L-mesure au sens de R. Fortet et E. Mourier donc rend chaque fonctionnelle linéaire mesurable.

C'est le cas pour le potentiel des vitesses, les composantes u et v de la vitesse et l'élévation qui se présentent sous la forme de séries presque sûrement absolument et uniformément convergentes $\sum_1^\infty\xi_n\varphi_n(x,y,t)$, $\sum_1^\infty\xi_n u_n(x,y,t)$, $\sum_1^\infty\xi_n v_n(x,y,t)$, et $\sum_1^\infty\xi_n\eta_n(x,y,t)$, où les fonctions φ_n, u_n, v_n et η_n désignent respectivement les cœfficients de Fourier de $G^{(1)},G^{(2)},G^{(3)}$ et G dans la base orthonormale $e_n(\lambda)$. A titre d'exemple, Joseph Kampé de Fériet cite le cas d'une suite $\{\xi_n\,;\,n\ge 1\}$ de variables aléatoires réelles indépendantes, centrées, de variances $\sigma_1^2,\sigma_2^2\ldots\sigma_n^2\ldots$, la série des variances étant convergente.

Si tel est le cas φ,u,v et η deviennent des fonctions aléatoires de moyennes nulles dont le calcul des variances et et corrélations s'opère simplement à l'aide des quantités σ_n^2 et des cœfficients de Fourier.

Ainsi, la corrélation entre $u(x,y,t)$ et $v(x,y,t)$ s'écrit

$$\sum_1^\infty\sigma_n^2 u_n(x,y,t)v_n(x,y,t)$$

et la covariance de η aux points x' et x'' et aux instants t' et t'' vaut

$$\sum_{1}^{\infty} \sigma_n^2 \eta_n(x', t') \eta_n(x'', t'') .$$

Il signale l'intérêt de ces formules lorsque les variables indépendantes ξ_n sont de plus normales, les variances constituant alors les seuls paramètres à définir.

C'est un modèle de mécanique statistique bien différent du précédent que Joseph Kampé de Fériet proposa lors d'une lecture donnée au DTMB le mardi 16 juin 1959 parue en septembre sous la forme du rapport technique :

On the statistical mechanics of gravity waves [164]

D'emblée, il dit se situer à l'opposé de sa lecture précédente en étudiant le cas d'une élévation de la surface libre fonction presque périodique de x et de t, ce modèle lui paraissant mieux correspondre à la réalité physique observée dans certains cas.

Explicitement, il suppose que le potentiel des vitesses s'exprime comme la somme de la série :

$$\varphi(x, y, t) = \sum_{1}^{+\infty} A_n \exp(-k_n y) \cos(\theta_n)$$

où $\theta_n = k_n x - \sqrt{k_n} t - \alpha_n$, les amplitudes A_n et les nombres d'onde k_n étant positifs tandis que les phases α_n vérifient :

$$0 \leq \alpha_n < 2\pi .$$

La convergence des séries de termes généraux $A_n, \sqrt{k_n} A_n, k_n A_n$ et $k^2 A_n$ justifie l'existence des dérivées partielles $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, 0, 1)$ sous forme de séries absolument et uniformément convergentes, leurs sommes étant des fonctions presque périodiques en x et en t.

Joseph Kampé de Fériet propose donc un nouveau modèle de mécanique statistique des ondes de gravité en définissant l'espace des phases Ω par le produit

$$\Omega = \mathcal{A} \times \Phi \times \mathcal{K} \quad \text{où}$$

- $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des suites de nombres positifs : $A = \{A_n \, ; \, n \geq 1\}$
- Φ l'ensemble des suites $\alpha = \{\alpha_n \, ; \, n \geq 1\}$ où chaque $\alpha_n \in [0, 2\pi[$
- $\mathcal{K}$ l'ensemble des suites $k = \{k_n \, ; \, n \geq 1\}$ où chaque $k_n \geq 0$.

Définir cette mécanique statistique reviendra donc à construire sur Ω une mesure de probabilité telle que, presque sûrement les séries de termes généraux A_n, $\sqrt{k} A_n$, $k_n A_n$ et $k_n^2 A_n$ convergent.

Il remarque que ceci est vérifié dès lors que pour chacune de ces suites de variables aléatoires positives, la série des espérances converge.

A titre d'exemple, il prouve que ces conditions sont bien réunies si l'on se donne trois suites indépendantes de variables aléatoires $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ et $\{k_n\}$, les variables α_n étant indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 2\pi[$, les β_n indépendantes et de même loi uniforme sur $]0, 1]$, les variables k_1, $k_2 - k_1, \ldots, k_n - k_{n-1}$ étant indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1, chaque A_n étant alors défini par

$$A_n = \sqrt{2}\sigma_n[-\log\beta_n]^{1/2}$$

les nombres σ_n étant strictement positifs et tels que la série de terme général $n^2\sigma_n^2$ converge.

Un calcul simple lui permet d'établir l'expression du tenseur de corrélation des vitesses et aussi celui de l'élévation qui est une fonction aléatoire stationnaire en x et t.

La dernière publication que Joseph Kampé de Fériet consacra aux ondes de gravité résulta d'un exposé donné en juin 1960 et parut en 1961 sous le titre

Statistical Fluid Mechanics : two dimensional gravity waves [165]

Après y avoir rappelé que son objectif était l'élaboration d'une Mécanique statistique des milieux continus en relation avec les équations de Navier - Stokes, il signale que la théorie linéarisée des ondes de gravité sur la surface libre d'un fluide incompressible fournit une approximation utile ; la nature très compliquée des vagues appelle une théorie statistique ; la plupart des recherches ayant été faites lorsque les vagues sont engendrées par un vent turbulent, il se propose pour sa part d'en décrire un modèle statistique à la surface de l'océan en air calme. Reprenant les notations de ses publications antérieures, il se propose de donner une théorie plus générale en considérant un potentiel des vitesses de la forme

$$\begin{aligned}\phi(x,y,t) \quad = \quad & \int_0^\infty \exp(-\lambda y)\Big[\cos(\sqrt{\lambda}t)(\cos\lambda x\;\, \mathrm{d}\omega_1(\lambda) + \sin\lambda x\, \mathrm{d}\omega_2(\lambda)) \\ & \qquad - \sin(\sqrt{\lambda}t)(\cos\lambda x\;\, \mathrm{d}\omega_3(\lambda) + \sin\lambda x\, \mathrm{d}\omega_4(\lambda))\Big]\end{aligned}$$

et les expressions des composantes de la vitesse u et v et de l'élévation η $u(x,y,t) = -\frac{\partial\phi}{\partial x}$, $v(x,y,t) = -\frac{\partial\phi}{\partial y}$, $\eta(x,t) = -\frac{\partial}{\partial t}\phi(x,0,t)$ qu'il se donne par dérivation formelle sous le signe somme. De même l'impulsion initiale $\phi(x,0,0)$ et l'élévation initiale $\eta(x,0)$ sont données par :

$$\begin{aligned}\phi(x,0,0) \quad &= \quad \int_0^\infty \cos\lambda x\, \mathrm{d}\omega_1(\lambda) + \sin\lambda x\, \mathrm{d}\omega_2(\lambda) \\ \eta(x,0) \quad &= \quad \int_0^\infty \sqrt{\lambda}(\cos\lambda x\, \mathrm{d}\omega_3(\lambda) + \sin\lambda x\, \mathrm{d}\omega_4(\lambda))\end{aligned}$$

L'aspect aléatoire du problème est alors introduit par les fonctions ω_j. Ceci l'amène à en donner deux présentations :

Dans la première, l'espace Ω est constitué des points

$$\omega = [\omega_1(\lambda), \omega_2(\lambda), \omega_3(\lambda), \omega_4(\lambda)]$$

où chacune des quatre fonctions $\omega_j(\lambda)$ est de variation bornée sur tout intervalle fini et telle que

$$\int_0^{+\infty} \lambda \, |\, \mathrm{d}\omega_j(\lambda)| < +\infty$$

Ceci lui permet d'affirmer que le potentiel des vitesses répond aux conditions posées ; les composantes de la vitesse tendant vers 0 si y tend vers $+\infty$, uniformément en x et t. Il note au passage (cf. p. 115) qu'en dehors de toutes considérations statistiques, l'expression de $\phi(x, y, t)$ fournit un exemple remarquable de fonctions de plusieurs variables qui sont à la fois des transformées de Laplace - Stieltjes en y et des transformées de Fourier - Stieltjes en x et t. Ceci posait le problème de leur caractérisation qui fut résolu par D.V. Widder pour les intégrales

$$\int_0^{\infty} \exp(-xr^2) \cos tr \cos yr^2 \, \mathrm{d}\alpha(r) \quad (\alpha \quad \text{non décroissante) et}$$
$$\int_0^{\infty} \exp(-xr^2) \cos tr \cos yr^2 \varphi(r) \, \mathrm{d}r \quad (\varphi \quad \text{positive)}$$

(cf. ses publications :

Sur une classe de fonctions $u(x, y, t)$ harmoniques en (x, y) et satisfaisant l'équation de la chaleur en (x, t) (C.R.A.S., 256, 2751–2753, 1963).

Functions of three variables which satisfy both the heat equation and Laplace's equation in two variables (J. Austral. Math. Soc., 3, 396–407, 1963).

A problem of Kampé de Fériet (Journ. of Math. Analysis and Applications vol. 9, n° 3, Déc. 1964, p. 458–467).

Muni de la norme :

$$\|\omega\| = \sum_{j=1}^{4} \int_0^{\infty} \lambda \, |\, \mathrm{d}\omega_j(\lambda)|$$

l'espace Ω des quadruples $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ défini ci-dessus est un espace de Banach.

L'état initial ω est entièrement défini par l'impulsion initiale $\phi(x, 0, 0) = \int_0^{\infty} \cos \lambda x \, \mathrm{d}\omega_1 + \sin \lambda x \, \mathrm{d}\omega_2$ et l'élévation initiale $\eta(x, 0) = \int_0^{\infty} \sqrt{\lambda}(\cos \lambda x \, \mathrm{d}\omega_3 + \sin \lambda x \, \mathrm{d}\omega_4)$ et l'état du système à l'instant t qu'il note $\omega^t = T_t \omega$ par :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega_1^t &= \cos \sqrt{\lambda} t \, \mathrm{d}\omega_1 - \sin \sqrt{\lambda} t \, \mathrm{d}\omega_3 \\
\mathrm{d}\omega_2^t &= \cos \sqrt{\lambda} t \, \mathrm{d}\omega_2 - \sin \sqrt{\lambda} t \, \mathrm{d}\omega_4 \\
\mathrm{d}\omega_3^t &= \sin \sqrt{\lambda} t \, \mathrm{d}\omega_1 + \cos \sqrt{\lambda} t \, \mathrm{d}\omega_3 \\
\mathrm{d}\omega_2^t &= \sin \sqrt{\lambda} t \, \mathrm{d}\omega_2 + \cos \sqrt{\lambda} t \, \mathrm{d}\omega_4
\end{aligned}$$

il note que les T_t agissant sur Ω constituent un groupe abélien de transformations linéaires bornées d'où un problème bien posé. Arrivé à ce point, il constate que la construction d'une mécanique statistique se heurte à une difficulté car il ne peut utiliser immédiatement les méthodes générales qu'il a données pour la construction de mesures de probabilité sur les espaces de Banach à base dénombrable, l'espace Ω n'étant pas séparable.

Il propose une construction des fonctions aléatoires $\omega_j(\lambda)$ $(j = 1,2,3,4)$ en les définissant comme suit :

$$\begin{aligned}
\omega_1(\lambda) &= \sum_{k_n \le \lambda} \big(A(k_n)\cos\alpha_n + B(k_n)\cos\beta_n\big) \\
\omega_2(\lambda) &= \sum_{k_n \le \lambda} \big(A(k_n)\sin\alpha_n + B(k_n)\sin\beta_n\big) \\
\omega_3(\lambda) &= \sum_{k_n \le \lambda} \big(A(k_n)\sin\alpha_n - B(k_n)\sin\beta_n\big) \\
\omega_4(\lambda) &= \sum_{k_n \le \lambda} \big(-A(k_n)\cos\alpha_n + B(k_n)\cos\beta_n\big)
\end{aligned}$$

où les fonctions A et B, définies sur $[0,\infty[$, sont positives, intégrables sur $[0,1]$, telles que λA et λB soient intégrables sur $[1,+\infty[$, les variables aléatoires k_1, k_2 $\dots k_n \dots$ représentent les instants successifs des sauts d'un processus de Poisson, les suites aléatoires $\{\alpha_n\}$ et $\{\beta_n\}$ étant indépendantes, composées d'éléments indépendants de même loi uniforme sur $[0,2\pi[$.

Sous ces hypothèses, il prouve que l'élément aléatoire ω appartient presque sûrement à l'espace Ω et il établit la convergence des trois séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} E\left[\big((A(k_n)+B(k_n)\big) \quad k_n^r\right] r = 0, 1/2, 1$$

et ceci lui permet de définit Φ, u, v, η par des sommes de séries presque sûrement absolument et uniformément convergentes, fonctions presque périodiques en x et t

$$\begin{aligned}
\Phi(x,y,t) &= \sum_1^\infty \exp(-k_n y)\Big[A(k_n)\cos(k_n x - \sqrt{k_n}t - \alpha_n) \\
&\qquad\qquad + B(k_n)\cos(k_n x + \sqrt{k_n}t - \beta_n))\Big] \\
u &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x},\ v = -\frac{\partial\Phi}{\partial y},\ \eta = \frac{\partial\Phi}{\partial t}(x,0,t)\,.
\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés du processus de Poisson, il prouve que les conditions de moyennes imposées à A et B équivalent à la convergence des trois intégrales

$$\int_0^\infty s^r(A(s)+B(s))\,\mathrm{d}s \quad r = 0, \frac{1}{2}, 1\,,$$

convergence a priori assurée par les conditions imposées à A et B. Le calcul de l'espérance $E[\Phi(x',y',t')\Phi(x'',y'',t'')]$ se ramène à celui de l'intégrale

$$\int_0^\infty \exp\bigl(-\lambda(y'+y'')\bigr)\Bigl[A^2(\lambda)\cos(\lambda(x'-x'')-\sqrt{\lambda}(t'-t'')) \\ +B^2(\lambda)\cos(\lambda(x'-x''))+\sqrt{\lambda}(t'-t'')\Bigr]\,\mathrm{d}\lambda$$

et il en déduit que le potentiel des vitesses est une fonction aléatoire stationnaire d'ordre deux en x et en t.

Après avoir évoqué de manière liminaire le cas où les ω_j sont absolument continus ce qui le ramène aux travaux entrepris avec Jack Kotik, il propose un second modèle où Ω est l'espace des fonctions continues sur $[0,+\infty[$ en utilisant la fonction aléatoire du mouvement brownien et une pseudo-intégrale de Stieltjes $\int_0^\infty f(\lambda)\,\mathrm{d}W(\lambda)$ qu'il ramène à l'intégrale $-\int_0^\infty f'(\lambda)W(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$ en imposant à f d'être absolument continue sur chaque intervalle $[0,a]$, telle que $f(\lambda)=O(\lambda^{-\alpha})$ pour un $\alpha>\frac{1}{2}$ si $\lambda\to+\infty$ et telle que $\lambda^\alpha f(\lambda)\in L^2[0,+\infty[$.

Il en déduit que cette intégrale définit une variable aléatoire normale centrée de variance $\int_0^\infty f^2(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$.

Il se donne ensuite quatre copies indépendantes W_1,W_2,W_3 et W_4 du mouvement brownien, deux fonctions A et B absolument continues sur chaque intervalle fini de $[0,\infty[$, vérifiant la condition $O(\lambda^{-\alpha-1/2})$ si $\lambda\to+\infty$ et telles que $\lambda^{\alpha+1/2}A(\alpha)$ et $\lambda^{\alpha+1/2}B(\lambda)$ soient de carrés intégrables sur $[0,\infty[$ (avec $\alpha>1/2$).

Ceci lui permet d'établir que le potentiel des vitesses

$$\begin{aligned}\phi(x,y,t) &= \int_0^\infty \exp(-\lambda y)\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\Bigl[\cos(\lambda x-\sqrt{\lambda}t)\,\mathrm{d}W_1(\lambda) \\ &\qquad +\sin(\lambda x-\sqrt{\lambda}t)\,\mathrm{d}W_2(\lambda)\Bigr] \\ &+ \int_0^\infty \exp(-\lambda y)\frac{B(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\Bigl[\cos(\lambda x+\sqrt{\lambda}t)\,\mathrm{d}W_3(\lambda) \\ &\qquad +\sin(\lambda x+\sqrt{\lambda}t)\,\mathrm{d}W_4(\lambda)\Bigr]\end{aligned}$$

est une solution régulière du probème posé ; les composantes u et v de la vitesse et l'élévation η peuvent, il l'établit, s'en déduire par dérivation sous le signe somme ; u, v et η sont des fonctions aléatoires normales stationnaires en x et t.

Notant $E(t\mid a,b)=\frac{1}{2}\int_a^b[\eta^2+\int_0^\infty(u^2+v^2)\,\mathrm{d}y]\,\mathrm{d}x$ l'énergie du fluide dans la bande $[a,b]$ il établit que, comme conséquence de la stationnarité en t, de u, v et η, son espérance est indépendante de t et vaut

$$(b-a)\int_0^\infty (A^2(\lambda)+B^2(\lambda))\,\mathrm{d}\lambda\,.$$

Il note aussi, la possibilité d'énoncer des théorèmes ergodiques, comme conséquence du fait que les fonctions u, v et η sont stationnaires en x et t et à spectre absolument continu.

Par exemple, si l'intégrale suivante est bien définie :

$$E\big(F(\eta(x,t))\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\eta)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\big(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\big)\,\mathrm{d}\eta$$

où

$$\sigma^2 = E\big(\eta^2(x,t)\big) = \int_0^{\infty}\big(A^2(\lambda)+B^2(\lambda)\big)\,\mathrm{d}\lambda$$

alors, presque sûrement : les moyennes spatiales et temporelles de $F(\eta(x,t))$ existent et sont égales à $E\big(F(\eta(x,t))\big)$.

Un énoncé analogue est donné pour $G\big(u(x,y,t)v(x,y,t)\big)$.

En conclusion, il remarque que l'équipartition de l'énergie supposerait que $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ soient constantes, de valeurs A_0 et B_0. Si tel était le cas, les intégrales définissant les fonctions aléatoires u et v continueraient à être définies en moyenne quadratique à l'intérieur du fluide (i.e. pour $y > 0$) tandis que l'expression de l'élévation perdrait toute signification. Les variables aléatoires normales $u(x,y,t)$ et $v(x,y,t)$ auraient à l'intérieur du fluide une moyenne nulle et une variance égale à $\frac{A_0^2+B_0^2}{4y}$.

Comme il le note en conclusion avec son humour habituel :

> « In an ocean where the waves follow the law of equipartition of energy, a submarine could expect a smooth cruise, but a boat navigating on the free surface should probably endure a very rough sea ! »

Solutions aléatoires de l'équation des ondes

Dans un exposé de 1949 *Sur la mécanique statistique des milieux continus* [103], Joseph Kampé de Fériet proposait un modèle d'une telle mécanique basé sur l'équation des ondes $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, $y(x,t)$ désignant le déplacement de la corde à l'instant t au point x de la corde, celle-ci étant supposée occuper l'axe Ox dans sa position d'équilibre $(-\infty < x < +\infty)$, l'état de la corde à chaque instant t en tout point x étant caractérisé par la donnée des fonctions $y(x,t)$ et $v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t}$. Il notait $w(x,t) = \int_0^x v(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi$ puis choisissait comme « coordonnées » du système à un instant t les fonctions :

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{2}(y(x,t)+w(x,t)), \psi(x,t) = \frac{1}{2}(y(x,t)-w(x,t))$$

de valeurs initiales $\varphi(x,0) = \alpha(x)$ et $\psi(x,0) = \beta(x)$, a et β étant supposées continues et pourvues de dérivées continues jusqu'à l'ordre deux. Il proposait de choisir comme espace des phases $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{\omega = (\omega_1,\omega_2) = (\alpha,\beta)\}$, « Ω_1 et Ω_2 réalisant deux exemplaires de l'espace des fonctions réelles de x $(-\infty < x < +\infty)$ continues ainsi que leurs dérivées premières et secondes ».

Ceci lui permettait d'énoncer un théorème d'unicité : pour les valeurs initiales $\alpha(x)$ et $\beta(x)$, on a nécessairement vu la nature du problème posé $\varphi(x,t) = \alpha(x+t)$ et $\psi(x,t) = \beta(x-t)$.

Il en déduisait que le mouvement de la corde lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$ définit un groupe abélien de transformations :

$$\omega_t = T_t\omega = (T_t\omega_1, T_t\omega_2)$$

Il proposait ensuite de définir une mesure de probabilité μ sur Ω par le produit de deux mesures μ_1 et μ_2 invariantes par les transformations T_t et il remarquait que ceci revenait à se donner deux fonctions aléatoires α et β indépendantes et strictement stationnaires en x. Ceci lui permettait ensuite d'énoncer un théorème ergodique en remplaçant « les moyennes temporelles prises le long d'une suite d'états de la corde par les moyennes statistiques calculées pour l'ensemble de tous les états possibles ».

Joseph Kampé de Fériet soulignait le caractère exceptionnel de ce résultat lié au caractère linéaire de l'équation vérifiée par une corde vibrante indéfinie et à la nature des transformations T_t. Il remarquait aussi : « Il est intéressant de noter que (comme nous le montrerons dans un autre travail) pour une corde finie fixée à ses extrémités, contrairement au cas actuel, le théorème ergodique ne s'applique pas en général ».

Il l'établit dans une communication donnée en août 1950 à Berkeley au second symposium sur la statistique mathématique et la théorie des probabilités :

Statistical mechanics of a continuous medium (vibrating string with fixed ends) [106]

Les déplacements $y(x,t)$ de la corde seront des fonctions à valeurs réelles, nulles en $x = 0$ et en $x = \ell$ pour tout t, périodiques de période 2ℓ, de classe C^2.

Il notait pour $t = \tau$ fixé $y(x) = y(x,\tau)$ et $v(x) = v(x,\tau)$, les valeurs initiales de $y(x,t)$ et $v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t}$ puis $f(x) = \frac{1}{2}\big(\frac{dy}{dx} + v(x)\big)$ sur $[0,\ell]$, $\frac{1}{2}\big(\frac{dy}{dx}(-x) - v(-x)\big)$ sur $[-\ell, 0]$ et il définissait ensuite l'espace des phases Ω comme étant l'espace de Banach séparable des fonctions f, définies sur $[0, 2\ell]$, à valeurs réelles, de classe C^1, périodiques de période 2ℓ et telles que $\int_0^{2\ell} f(s)\,\mathrm{d}s = 0$. Le déplacement de la corde vibrante $y(x,t)$ s'exprime simplement par l'intégrale $\int_{-x}^{+x} f(t-\tau+s)\,\mathrm{d}s$.

Après avoir proposé une construction d'une mesure de probabilité sur cet espace, il prouve à l'aide de deux exemples simples que le théorème ergodique n'est pas vérifié en général.

Il reprend cette étude de manière simplifiée au chapitre 4 du cours qu'il donna à Varenna en 1957

Problèmes mathématiques de la turbulence homogène [154]

Il y suppose donnée une suite $\{\eta_n\,;\, n \geq 1\}$ de variables aléatoires réelles, vérifiant la condition :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 E(|\eta_n|) < +\infty\,.$$

Il démontre que la fonction aléatoire $u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \eta_n \sin n\pi x \cos n\pi t$ constitue l'unique solution (aléatoire) de l'équation des ondes, constamment nulle aux points $x=0$ et $x=1$, telle que :

$$v(x,t)=\frac{\partial u}{\partial t}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\pi n\eta_n \sin n\pi x \sin n\pi t$$

et admettant pour valeurs initiales aléatoires

$$u(x,0)=U(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\eta_n \sin n\,\pi x \quad \text{et} \quad v(x,0)=0\,.$$

Il envisage ensuite le cas particulier où les variables η_n constituent une suite de variables aléatoires normales indépendantes centrées telles que

$$E(\eta_n^2)=\sigma_n^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\sigma_n \quad \text{converge}$$

Il en déduit que les fonctions aléatoires $u(x,t)$ et $v(x,t)$ sont normales centrées et il donne l'expression de la covariance ρ de $u(x,t)$:

$$\rho(x,t,y,s)=E\big(u(x,t)u(y,s)\big)=\sum_{n=1}^{+\infty}\sigma_n^2 \sin n\pi x \sin n\pi y \cos n\pi t \cos n\pi s$$

et il signale que pour chacun des couples (x,t) d'une part, (y,s) de l'autre ρ vérifie l'équation des ondes. Il notait que « c'est là un cas particulier d'une propriété très générale des intégrales aléatoires d'équations aux dérivées partielles linéaires » ; il avait d'ailleurs remarqué ceci dans d'autres publications (cf. par exemple [135] et [139]).

Jusqu'à présent, les fonctions $y(x,t)$ représentant le déplacement de la corde étaient censées être pourvues de dérivées continues jusqu'à l'ordre deux.

Dans un cours donné à Pise en 1958 :

Meccanica Statistica dei Mezzi continui [155]

il remarquera que ceci excluait pour la corde vibrante une configuration aussi simple qu'une ligne polygonale et ceci le conduira à introduire des « intégrales généralisées » qui ont déjà été évoquées.

Dans cet exposé de Pise, il commençait par envisager le cas classique des fonctions de la forme

$$u(x,t)=\int_{t-x}^{t+x}\omega(s)\,\mathrm{d}s$$

où ω est de classe C^1 sur $[0,2\ell]$, périodique de période 2ℓ et d'intégrale nulle sur $[0,2\ell]$, les points ω constituant l'espace des phases Ω. C'est l'unique solution nulle en $x=0$ et $x=\ell$ pour tout t, de classe C^2 en (x,t) sur $[0,\ell]\times\mathbb{R}$, de valeurs initiales $u(x,0)=U(x)$ et $\big(\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\big)_{t=0}=V(x)$, ω étant défini par

$$\omega(s)=\frac{1}{2}(U'(s)+V(s)) \text{ sur } [0,\ell],\ \frac{1}{2}(U'(-s)-V(-s)) \text{ sur } [-\ell,0]\,.$$

Il propose ensuite d'élargir l'espace des phases Ω qui devient l'espace de Banach $C_0[0,2\ell]$ des fonctions ω définies et continues sur $[0,2\ell]$ telles que $\int_0^{2\ell}\omega(s)\,\mathrm{d}s = 0$.

Un pas supplémentaire fut franchi dans *Statistical mechanics of continuous media* [168] repris également dans le troisième tome de son *Introduction à la théorie des systèmes évolutifs aléatoires* [215] où il donne un exposé systématique de la notion d'intégrale aléatoire généralisée :

Dans *Statistical mechanics of continuous media* le déplacement transversal de la corde vibrante demeure défini par l'expression analytique $u(x,t) = \int_{t-x}^{t+x}\omega(s)\,\mathrm{d}s$ où la fonction ω intégrable sur $[0,2\ell]$ vérifie $\int_0^{2\ell}\omega(s)\,\mathrm{d}s = 0$.

En tant que fonction aléatoire, $\omega(s)$ était représentée par une série de Fourier à cœfficients aléatoires :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\xi_n \cos\frac{n\pi s}{\ell} + \eta_n \sin\frac{n\pi s}{\ell}\right)$$

d'où la représentation de $u(x,t)$ par sa série de Fourier :

$$u(x,t) = \frac{2\ell}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\xi_n, \cos\frac{n\pi t}{\ell} + \eta_n \sin\frac{n\pi t}{\ell}\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,.$$

Joseph Kampé de Fériet proposait divers choix pour caractériser les fonctions ω chacun d'eux aboutissait à définir $u(x,t)$ comme limite d'une suite $u_n(x,t)$ (n-ème somme partielle de la série de Fourier de $u(x,t)$), chacune des fonctions $u_n(x,t)$ étant une fonction de classe C^2 en (x,t), solution de l'équation des ondes et la convergence ayant lieu au sens de l'espace fonctionnel envisagé.

Après avoir rappelé les résultats obtenus à Berkeley en 1950 et l'élargissement proposé à Pise en 1958 en choisissant pour espace des phases $\Omega = C_0[0,2\ell]$, il propose une nouvelle généralisation en n'imposant désormais à la fonction $\omega(s)$ que d'être de carré intégrable sur $[0,2\ell]$ et d'intégrale nulle sur $[0,2\ell]$.

L'espace des phases choisi est donc $\Omega_0 = L_0^2[0,2\ell]$.

La fonction $u(x,t)$ devient donc une fonction aléatoire absolument continue en x et t. Joseph Kampé de Fériet choisit de définir sur Ω_0 une L-mesure de probabilité invariante par l'application $T_t : T_t\omega(s) = \omega(s+t)$, ω étant ainsi une fonction aléatoire stationnaire en s, continue en moyenne quadratique, de corrélation $\rho(h)$ continue définie par la somme de sa série de Fourier

$$\rho(h) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n \cos\left(\frac{n\pi h}{\ell}\right).$$

Pour y parvenir, il se donne une suite de variables aléatoires indépendantes, centrées, $\{\xi_1,\eta_1,\ldots,\xi_n,\eta_n\ldots\}$ telle que pour tout entier $n \geq 1$, $E(\xi_n^2) = E(\eta_n^2) = \lambda_n$, la série de terme général λ_n étant convergente d'où

$$\omega(s) \sim \sum_{1}^{\infty}\left(\xi_n \cos\frac{n\pi s}{\ell} + \eta_n \sin\frac{n\pi s}{\ell}\right)$$

série presque sûrement fortement convergente dans $\Omega_0 = L_0^2[0, 2\ell]$, $u(x,t)$ étant somme d'une série de Fourier absolument et uniformément convergente.

A titre d'exemple, il citait le cas où $\lambda_n = \frac{1}{n^2}$, les variables aléatoires ξ_n et η_n étant normales et $\omega(s)$ s'exprimant à l'aide de $W(s)$ fonction aléatoire du mouvement brownien par :

$$\omega(s) = W(s) - \frac{s}{2\ell}W(2\ell) - \int_0^{2\ell} \Big[W(s) - \frac{s}{2\ell}W(2\ell)\Big] \,\mathrm{d}s$$

A l'aide de la corrélation $\rho(s)$ de la fonction aléatoire $\omega(s)$, il établit que la fonction aléatoire $u(x,s)$ et ses dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$ sont centrées et donne l'expression de $E(u^2(x,t))$, $E\big(\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\big)^2$, $E\big(\frac{\partial}{\partial x}(u(x,t))\big)^2$ et de la covariance de $\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)$, en fonction de ρ, la covariance $E\big(\frac{\partial}{\partial t}u(x',t')\frac{\partial}{\partial t}u(x'',t'')\big)$ s'exprimant comme suit : $\rho(t'-t''+x'-x'') + \rho(t'-t''-(x'-x'')) - \rho(t'-t''+x'+x'') - \rho(t'-t''-(x'+x''))$ ce qui fait ressortir la stationnarité d'ordre deux en t de cette dérivée partielle.

Il justifiera en 1961 son modèle et notamment l'indépendance supposée de la suite de variables aléatoires $\{\xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_n, \eta_n \ldots\}$) en faisant remarquer que ce choix maximise l'entropie de la corde vibrante (cf. *Sur les intégrales aléatoires des équations aux dérivées partielles et la mécanique statistique des milieux continus* [177]) ; il notera aussi que cette entropie est maximale lorsque les variables aléatoires $\ldots \xi_n, \eta_n \ldots$ sont non seulement indépendantes mais aussi normales.

Avec ce modèle l'énergie totale de la corde vibrante s'écrit

$$E = \frac{1}{2}\int_0^{2\ell} \left(\big(\frac{\partial u}{\partial t}\big)^2 + \big(\frac{\partial u}{\partial x}\big)^2 \right) \mathrm{d}x = \ell \sum_{n=1}^{+\infty} (\xi_n^2 + \eta_n^2)$$

de valeur moyenne finie et égale à $2\ell \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n$, il note aussi que, hormis le cas où tous les λ_n sont nuls, ceci exclut l'équipartition de l'énergie entre les modes de vibration de la corde.

Ceci l'amène à introduire une ultime généralisation qui fait référence à une étude du mouvement brownien de la corde vibrante due à G.A. Van Lear et G.E. Uhlenbeck. Cette fois, il fait totalement abstraction des dérivées lesquelles sont même presque sûrement censées ne pas exister pour chaque couple (x,t).

Il définit directement le déplacement de la corde vibrante sur $[0, 2\ell]$ à l'aide du pont brownien $w(s)$, nul en 0 et 2ℓ, prolongé à $\mathbb{R}$ par périodicité de période 2ℓ, $w(s)$ étant défini sur $[0, 2\ell]$ à l'aide de la fonction de Wiener $W(s)$ par

$$w(s) = W(s) - \frac{s}{2\ell}W(2\ell)$$

et le déplacement $u(x,t)$ s'écrivant :

$$u(x,t) = w(t+x) - w(t-x)$$

$w(s)$ s'écrit sous la forme d'une série presque sûrement absolument et uniformément convergente sur $[0, 2\ell]$

$$w(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \Big(\xi_n \sin \frac{n\pi s}{2} + \eta_n \big(1 - \cos \frac{n\pi s}{2}\big) \Big)$$

les variables aléatoires $\{\xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_n, \eta_n, \ldots\}$ étant indépendantes et de même loi normale d'espérance nulle et de variance $\lambda > 0$. Il en déduit que $u(x,t)$ est stationnaire par rapport à t car :

$$E\big(u(x',t')u(x'',t'')\big) = 4\lambda \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi}{\ell}(t' - t'') \sin \frac{n\pi x'}{\ell} \sin \frac{n\pi x''}{\ell}$$

et, en particulier $E(u^2(x,t)) = 2\lambda\pi^2 \frac{x}{\ell}\big(1 - \frac{x}{\ell}\big)$. Il remarque aussi qu'il y a équipartition de l'énergie entre les divers modes de vibration et que l'énergie moyenne est infinie.

La dernière partie notée 4 de ce travail reprend les mêmes problèmes pour la *théorie linéarisée des ondes planes sonores se propageant dans un gaz parfait emplissant tout l'espace* $\mathbb{R}^3$.

Les notations qu'il adopte sont les suivantes : pour une molécule située au point x à l'instant t, $\xi(x,t)$ désigne son déplacement normal à l'onde, $u(x,t) = \frac{\partial \xi}{\partial t}$ sa vitesse longitudinale, $\rho(x,t)$ sa densité en ce point et ρ la valeur constante de cette densité en régime non perturbé, $\delta(x,t) = -\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\rho(x,t) - \rho}{\rho}$ le changement relatif de densité, c la vitesse de propagation de l'onde sonore supposée constante ; ξ vérifie l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\,.$$

Partant de deux fonctions arbitraires ω_1 et ω_2 définies sur $\mathbb{R}$, Joseph Kampé de Fériet donne d'abord les solutions formelles :

$$\begin{aligned}
\xi(x,t) &= -\int_0^{x-ct} \omega_1(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^{x+ct} \omega_2(s)\,\mathrm{d}s \\
u(x,t) &= c[\omega_1(x-ct) + \omega_2(x+ct)] \\
\delta(x,t) &= \omega_1(x-ct) - \omega_2(x+ct)
\end{aligned}$$

et introduit l'espace des couples $(\omega_1(s), \omega_2(s))$ noté Ω.

Par analogie avec l'étude de la corde vibrante, il propose les quatre choix suivants :

1°) $\Omega = C^1]-\infty, +\infty[\times C^1]-\infty, +\infty[$,

2°) $\Omega = C]-\infty, +\infty[\times C]-\infty, +\infty[$,

3°) $\Omega = \Lambda \times \Lambda$ où Λ désigne l'espace vectoriel des fonctions de carré intégrable sur tout compact, 4°) Rejetant l'existence de u et δ, poser

$$\xi(x,t) = \phi_1(x-ct) + \phi_2(x+ct)$$

où ϕ_1 et ϕ_2 sont continues, choix menant à un type de mouvement brownien.

Il note une différence essentielle avec l'étude faite pour la corde vibrante, aucun des espaces fonctionnels n'est de Banach d'où un nouveau type de mécanique statistique d'un milieu continu.

Cependant chacun de ces espaces peut être défini par une infinité dénombrable de semi-normes : ce sont respectivement avec les notations utilisées par l'auteur dans *Kinematics of Homogeneous Turbulence*, l'espace fonctionnel Γ des fonctions $\omega(s)$, continues sur tout intervalle muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, l'espace Λ dont la topologie est définie par la famille dénombrable de semi-normes

$$P_n(\omega) = \left[\int_{-n}^{+n} \omega^2(s)\,\mathrm{d}s\right]^{1/2} .$$

Se référant aux définitions de *Kinematics of Homogeneous Turbulence*, il introduit sur $\Omega = \Lambda \times \Lambda$ la probabilité $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$, produit de deux probabilités régulières admissibles c'est-à-dire, telles que pour tout compact D l'énergie $E_D = \int_D \omega^2(s)\,\mathrm{d}s$ soit de moyenne finie.

Joseph Kampé de Fériet étudie ensuite le cas particulier où ω_1 et ω_2 sont deux fonctions aléatoires normales stationnaires centrées, de corrélations notées ρ_1 et ρ_2.

Si $u_j = u(x_j,t_j)$ et $\delta_j = \delta(x_j,t_j)$, il prouve que u et δ sont deux fonctions aléatoires normales stationnaires vérifiant :

$$\begin{aligned} E(u_j u_k) &= c^2 E(\delta_j\delta_k) = c^2\big(\rho_1\left[(x_j-x_k)-c(t_j-t_k)\right] \\ &\qquad\qquad +\rho_2\left[(x_j-x_k)+c(t_j-t_k)\right]\big) \\ E(u_j\delta_k) &= c\rho_1\left[(x_j-x_k)-c(t_j-t_k)\right] - c\rho_2\left[(x_j-x_k)+c(t_j-t_k)\right] \end{aligned}$$

Posant

$$\rho_j(h) = \int_0^\infty \cos\lambda h\,\mathrm{d}\mathcal{F}_j(\lambda) \qquad j=1,2$$

et utilisant un résultat dû à G. Maruyama énoncé dans *Kinematics of Homogeneous Turbulence* il énonce un théorème ergodique spatial et un théorème ergodique temporel lorsque le spectre d'énergie $\mathcal{F}_1(\lambda)+\mathcal{F}_2(\lambda)$ est continu.

4.8 Théorie de l'Information généralisée

Introduction Initié dès 1946 à la théorie de l'Information par Norbert Wiener et Claude Shannon qui venaient de la créer, Joseph Kampé de Fériet y consacra plusieurs de ses enseignements à Lille et à l'étranger (cf. ses publications

[178], [182], [183] et [185]). En particulier, le principe du maximum de l'entropie lui permit dans certaines de ses publications relatives aux solutions aléatoires d'équations aux dérivées partielles, de justifier certaines de ses hypothèses (indépendance d'une suite de variables aléatoires, normalité de celles-ci ...) retenues pour bâtir un modèle. Au fil des ans, il lui apparut que la notion d'information lui paraissait plus primitive que celle de probabilité et conditionnait le choix d'un modèle probabiliste. Allant au delà, il en vint à concevoir une étude de la notion d'information indépendante du concept de probabilité d'où une série de recherches et de publications à partir de 1967 jusqu'en 1982. Leur point de départ résulte d'un séjour de quatre mois qu'il effectua à Ferrare en 1966, repensant les fondements de la théorie de l'Information avec deux mathématiciens italiens, Bruno Forte de l'Université de Pavie et Pietro Benvenuti de l'Institut de mathématiques appliquées de Rome. A plusieurs reprises, il explicita les raisons de la nouvelle orientation qu'il donnait ainsi à ses recherches.

En 1969, lors d'un colloque international du C.N.R.S. qui se tint à Clermont-Ferrand du 30 juin au 5 juillet, il notait d'abord que la définition donnée par Wiener et Shannon de l'information fournie par la réalisation de l'événement A sous la forme

$$J(A) = -c \log P(A), \quad c > 0,$$

« est essentiellement liée à la possibilité de répéter indéfiniment cet événement A », d'où, ce faisant, « Nous nous interdisons de donner un sens à la mesure de l'Information fournie par des événements qui, par leur nature - même, ne peuvent être répétés. »

A Cachan, en juillet 1977, au colloque international du CNRS sur la théorie de l'Information, il consacra deux exposés aux :

Deux points de vue de la théorie de l'Information : information a priori, information a posteriori [233]

Dans le résumé de cet exposé, il note : « Considérant un événement A qui peut se produire ou non dans une expérience π, il faut distinguer deux situations différentes : avant ou après π.
« A posteriori, la quantité d'Information est mesurée par un nombre J qui ne dépend que de l'événement réalisé dans π ... *une théorie de l'Information a posteriori a pour seul but d'expliciter les propriétés que l'intuition impose à J.*
A priori, nous ne pouvons connaître *au mieux* que la probabilité $P(A)$ de la réalisation de A dans π ; nous pouvons donc seulement calculer *l'espérance mathématique* de la quantité d'Information

$$H(\pi) = P(A)J(A) + P(A^c)J(A^c)\dots$$

la théorie de l'Information a posteriori est donc une préface indispensable de la théorie de l'Information a priori. ...

« Les résultats obtenus pour J depuis la publication de notre Note avec Bruno Forte (17 juillet 1967) ne constituent pas à proprement dit une Théorie généralisée de l'Information, comme on le dit souvent ; ils ouvrent seulement une route dans un domaine différent de celui de l'Information a priori. »

Pour conclure sur les raisons qui ont guidé Joseph Kampé de Fériet en s'écartant de la théorie classique de Wiener – Shannon, on peut aussi se référer à son exposé donné à Marseille-Luminy en juin 1973 :

La théorie généralisée de l'Information et la mesure subjective de l'Information [224]

On y lit pages 4 et 5 :

« Une autre lacune a souvent été soulignée : L. Brillouin[1] insiste beaucoup, en particulier, sur cet aspect ; même dans le cas de la transmission des messages, but auquel elle est bien adaptée, la théorie de Wiener – Shannon reste purement *syntactique* ; elle n'a aucune valeur *sémantique* : elle est basée sur la structure et non sur le contenu .... »

« Il nous paraît donc clair que la théorie de Wiener – Shannon, malgré ses succès dans certains domaines, ne constitue pas la Théorie générale de l'Information : il y a des aspects importants de la notion d'Information qui lui échappent. »

Axiomatisation de la théorie généralisée de l'Information

Joseph Kampé de Fériet et Bruno Forte publient en juillet et septembre 1967, trois Notes aux *Comptes rendus* [191], [192] et [193] avec le même intitulé :

Information et Probabilité

Utilisant les propriétés de l'Information de Wiener – Shannon, ils énoncent pour une algèbre de Boole ou une tribu $\mathcal{S}$ de parties de Ω, les axiomes que doit vérifier une Information J définie sur $\mathcal{S}$.

Le premier axiome dit des valeurs universelles s'énonce :

$$J(\Omega) = 0 \quad \text{et} \quad J(\emptyset) = +\infty$$

et le second dit de monotonie par :

$$\text{si} \quad B \in \mathcal{S}, A \in \mathcal{S} \quad \text{et} \quad A \subset B\,, \quad \text{alors} \quad J(A) \geq J(B)\,.$$

Ultérieurement dans *L'indépendance des événements dans la Théorie généralisée de l'Information* [229], Joseph Kampé de Fériet notera qu'en l'absence de structure algébrique définie sur $\mathcal{S}$, ces deux axiomes constituent le noyau essentiel de la notion de mesure de l'information.

Le troisième axiome conduit les auteurs à introduire la notion d'indépendance algébrique et de σ-indépendance algébrique (ou de M-indépendance et de σ-M indépendance selon la terminologie de D.A. Kappos dans *Strukturtheorie der Wahrschenlichkeits - Felder und Raüme* - Berlin, Springer 1960, p. 77). Ces notions furent introduites par S. Banach et E. Marczewski (cf. S. Banach *On measures in independent fields* édité par S. Hartmann, Studia Math, 10 (1948),

[1] Joseph Kampé de Fériet fait ici référence à l'ouvrage de Léon Brillouin « *La science et la Théorie de l'Information* » Masson – Paris – 1959. Léon Brillouin fut son condisciple à la Sorbonne et il eut maintes fois l'occasion de le rencontrer aux Etats-Unis.

159–177, E. Marczewki *Indépendance d'ensembles et prolongement de mesures* Colloquium Mathematicum, 1, 1948, 122–132, *Ensembles indépendants et leurs applications à la théorie de la mesure*, Fundamenta Mathematicae, 35, 1948, p. 13–28).

Ils la définissent comme suit :

« Étant donnée une famille I d'indices, la famille $\{\mathcal{A}_i\,;\, i \in I\}$ d'algèbres (respectivement tribus) est dite M (respectivement $\sigma - M$) indépendante si pour toute famille finie (respectivement dénombrable) $J \subset I$, on a :

$$\bigcap_{i\in J} B_i \neq \emptyset \quad \text{pour chaque choix des } B_i \text{ non vides,} \quad B_i \in \mathcal{A}_i\,; \quad i \in J\,.$$

Le troisième axiome d'indépendance est alors défini par Joseph Kampé de Fériet et Bruno Forte comme suit :

Axiome III¹ Si $\{\mathcal{A}_i\,;\, i \in I\}$ est une famille de sous-algèbres de $\mathcal{S}$, M-indépendantes, alors pour tout $J = \{i_1, \ldots, i_n\} \subset I$,

$$J\Big(\bigcap_{k=1}^{n} B_{i_k}\Big) = \sum_{k=1}^{n} J(B_{i_k})$$

avec la notion de σ-indépendance :

Axiome III² Si $\{\mathcal{A}_i\,;\, i \in I\}$ est une famille de sous-algèbres de la tribu $\mathcal{S}$, $M - \sigma$-indépendantes, pour tout $J = \{i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots\} \subset I$,

$$J\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_{i_k}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} J(B_{i_k})\,.$$

Cet axiome dédoublé appelle deux remarques :

D'une part, Joseph Kampé de Fériet reviendra ultérieurement sur ces axiomes qui lui paraissaient trop restrictifs et trop liés à l'Information de Wiener - Shannon ; il proposera d'y substituer la formulation suivante exposée en détail plus loin : si A et B sont M-indépendants : $J(A \cap B) = G(J(A), J(B))$.

En second lieu, Joseph Kampé de Fériet et Bruno Forte étudieront la possibilité de prolonger un résultat établi par S. Banach et E. Marczewski relatif au lien entre M-indépendance et indépendance au sens probabiliste (voir infra).

La nécessité d'attribuer une Information à une réunion finie ou dénombrable d'événements conduisit les auteurs à adjoindre un axiome d'additivité ou de composabilité, l'Information J étant alors dite *composable* de loi F définie par

Axiome IV Si A et B sont des événements disjoints,

$$J(A \cup B) = F\big(J(A), J(B)\big) = J(A) T J(B)\,.$$

L'ensemble de définition de l'opération T est noté Γ soit :

$$\begin{aligned}\Gamma = \Gamma(J) \quad &= \quad \big\{(x,y)\,;\, x \in \bar{\mathbb{R}}_+, y \in \bar{\mathbb{R}}_+ : \exists A \in \mathcal{S},\ \exists B \in \mathcal{S}, \\ &\qquad\qquad A \cap B = \emptyset\ J(A) = x \quad \text{et } J(B) = y\big\}\ .\end{aligned}$$

Ainsi pour l'Information de Wiener - Shannon $J(A) = -c \log P(A)$:

$$\begin{aligned}F(x,y) \quad &= \quad -c\,\log\Big\{\exp\big(-\frac{x}{c}\big) + \exp\big(-\frac{y}{c}\big)\Big\}\ , \\ \Gamma \quad &= \quad \Big\{(x,y) : e^{-x/c} + e^{-y/c} \leq 1\Big\}\ .\end{aligned}$$

Plus tard, les auteurs étendront leur définition de F à $\bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{\mathbb{R}}^+$ en posant $F(x,y) = 0$ si $(x,y) \notin \Gamma(J)$.

Ultérieurement, Joseph Kampé de Fériet, Pietro Benvenuti et Bruno Forte remarquent (cf *La forme générale de l'opération de composition d'une Information* [198]) qu'*une Information n'est pas toujours composable* : ils citent le cas d'un espace métrique ; en désignant par $d(A)$ le diamètre de A, et $\psi\colon \bar{\mathbb{R}}^+ \to \bar{\mathbb{R}}^+$, non croissante, telle que $\psi(0) = +\infty$ et $\psi(+\infty) = 0$, ils posent : $J(A) = \psi(d(A))$; J répond bien à l'idée d'information d'autant meilleure que la précision est plus grande mais elle n'est pas composable.

Pour une Information composable, Joseph Kampé de Fériet et Bruno Forte associent éventuellement un *axiome 5 dit de σ-additivité*.

Axiome V Pour toute suite $\{A_n\,;\, n \geq 1\}$ d'événements disjoints

$$J\big(\bigcup_1^\infty A_n\big) = \lim_{n\to\infty} \mathop{\mathrm{T}}_1^n J(A_k) = \mathop{\mathrm{T}}_1^\infty J(A_n)\,.$$

Ils signalent aussi, par utilisation des axiomes 3 et 4 et de la distributivité des opérations d'union et d'intersection, l'existence d'une règle de compatibilité. A titre d'exemple d'Information composable non déduite d'une probabilité, ils citent le cas où, Ω étant infini, on pose : $J(A) = (\mathrm{card}(A))^{-1}$ si A fini, 0 sinon, l'opération de composition étant définie par $xTy = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^{-1}$; de cette Information qu'ils qualifient d'hyperbolique lorsque $\Omega = \mathbb{N}$, on obtient ainsi une mesure d'Information invariante par translation ce qui est exclu pour l'information de Wiener - Shannon.

Avant d'entrer dans le détail des travaux qui ont résulté de cette première Note, il convient de remarquer que, plus tard, Joseph Kampé de Fériet s'est aussi intéressé à une interprétation sémantique de l'Information, distinguant d'abord Information de localisation et Information liée à une classe de propositions puis établissant leur équivalence en partant du fait que « Tout treillis booléen est isomorphe à une algèbre $\mathcal{S}$ de parties d'un ensemble Ω » (cf. les travaux qu'il entreprit avec un groupe de travail lyonnais qui centrait son activité sur la théorie des questionnaires et notamment ses publications [224], [227] et [233]).

Une généralisation de l'Information de Wiener – Shannon : les Informations de type M

Dans leur seconde Note *Information et Probabilité* [192], Joseph Kampé de Fériet et Bruno Forte proposèrent une généralisation de l'Information de Wiener – Shannon qualifiée d'Information de type M et définie sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ comme suit :

$$\forall A \in \mathcal{S} : \; J(A) = \theta(\mu(A))$$

où θ, définie sur $\mu(\mathcal{S})$ est strictement décroissante, telle que $\theta(0) = +\infty$ et, $\theta(\mu(\Omega)) = 0$ et possède en outre la propriété suivante : pour toute suite croissante $\{x_n\}$ d'éléments de $\mu(\mathcal{S})$, de limite x appartenant à $\mu(\mathcal{S})$:

$$\theta(x) = \lim_{n \to \infty} \theta(x_n) \, .$$

L'Information J ainsi définie est composable, d'opération de composition

$$xTy = F(x, y) = \theta(\theta^{-1}(x) + \theta^{-1}(y))$$

Étendant un résultat établi pour les probabilités par S. Banach et E. Marczewski, ils en déduisent pour des événements algébriquement indépendants *une caractérisation de l'Information de Wiener – Shannon* comme suit : « La seule Information de type M pour laquelle on peut choisir arbitrairement les valeurs $x_i \in \bar{\mathbb{R}}_+$ des informations $J(B_i)$ sur les ensembles indépendants est l'Information de Wiener – Shannon

$$\theta^{-1}(x) = \exp\left\{-\frac{x}{c}\right\} \quad \text{où} \quad c > 0 \, , \quad \theta(x) = -c \log x$$

et μ est alors nécessairement une mesure de probabilité sur $\mathcal{S}$. »

Informations de type Inf

À l'Information de Wiener – Shannon correspond la fonction de composition $F_c(x, y) = -c \log\bigl(e^{-x/c} + e^{-y/c}\bigr) \; c > 0$. En faisant tendre c vers 0, Joseph Kampé de Fériet et Bruno Forte sont amenés à considérer un nouveau type d'Information dite de type Inf caractérisé par l'égalité

$$J(A \cup B) = \mathrm{Inf}(J(A), J(B)) \; A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{S} \, ,$$

égalité qui demeure valable même si les événements ne sont pas disjoints.

Ils prouvent aussi que le théorème de Banach – Marczewski s'étend également à ce cas et que les Informations de Wiener – Shannon et de type Inf sont les seules Informations composables pour lesquelles il est possible de choisir arbitrairement les valeurs des informations sur les événements M-indépendants (cf. leur troisième Note [193]).

Les Informations de type Inf vont faire l'objet de nombreux travaux que Joseph Kampé de Fériet entreprendra avec divers auteurs.

Avant d'entrer dans leur détail, il convient d'abord de se reporter aux travaux consacrés aux Informations composables en lien avec la théorie des équations fonctionnelles et celle des semi-groupes.

Informations composables

Le 29 septembre 1969, Joseph Kampé de Fériet, Bruno Forte et Pietro Benvenuti présentèrent une Note [198] aux *Comptes rendus* :

Se donnant un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ tel que $\bar{\mathbb{R}}^+ = \mu(\mathcal{S})$ ou $\forall A \in \mathcal{S}$: $\mu(A \cap \mathcal{S}) = [0, \mu(A)]$ condition vérifiée pour toute mesure σ-finie, non atomique, ils commencent par généraliser la notion d'Information de type M, en introduisant l'Information de type M' définie par : $J(A) = \varphi(\mu(A))$ où $\varphi(x) = \theta(x)$ si $x \in [0, \bar{\mu}], 0$ si $x > \bar{\mu}$ avec $\bar{\mu} < \mu(\Omega)$, $\bar{\mu}$ étant un nombre arbitraire choisi tel que $0 < \bar{\mu} \leq \mu(\Omega)$ et θ étant une application continue, strictement décroissante de $[0, \bar{\mu}]$ sur $\bar{\mathbb{R}}^+$ telle que $\theta(0) = +\infty$ et $\theta(\bar{\mu}) = 0$. Les conditions imposées à φ sont nécessaires et suffisantes pour que J soit composable et on a alors

$$xTy = F(x,y) = \varphi(\theta^{-1}(x) + \theta^{-1}(y)) \text{ si } \theta^{-1}(x) + \theta^{-1}(y) \leq \mu(\Omega)\,.$$

Définissant comme précédemment par

$$\Gamma = \{(x,y)\,;\, \exists A \in \mathcal{S} \text{ et } \exists B \in \mathcal{S} \text{ tels que } A \cap B = \emptyset \text{ et } J(A) = x,\ J(B) = y\}$$

ils montrent que Γ est convexe, symétrique, de frontière

$$F = \{(x,y) :\ xTy = 0,\ x = J(A),\ y = J(A^c)\,,\ A \in \mathcal{S}\}$$

et prolongent ensuite T à $\bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{\mathbb{R}}^+$ en posant pour $(x,y) \notin \Gamma$, $xTy = 0$, ce qui leur permet de montrer que T définit un semi-groupe sur $\bar{\mathbb{R}}^+$.

En ne retenant que des opérations continues, ceci les conduisit à la détermination des semi-groupes sur $\bar{\mathbb{R}}^+$ tels que

$$\forall x \in \bar{\mathbb{R}}^+ :\ y' < y'' \rightarrow xTy' \leq xTy'' \text{ et } xT + \infty = x\,.$$

Ils donnent l'expression générale de l'opération de composition continue d'une Information composable à l'aide de l'ensemble fermé Λ de ses idempotents. L'ensemble de ces résultats fut repris par Joseph Kampé de Fériet dans l'exposé [202] qu'il donna lors du 7-ième Symposium sur les équations fonctionnelles à Waterloo (Ontario) en septembre 1969 et figurait déjà dans une synthèse d'ensemble sur l'état de ses recherches présentée à un Colloque du CNRS tenu à Clermont-Ferrand (cf. sa publication [203] *Mesures de l'Information fournie par un événément*).

Joseph Kampé de Fériet et Pietro Benvenuti ont été amenés à introduire la notion *d'opération de composition régulière* F (cf. leur Note du 21 février 1972 *Opération de composition régulière et ensemble de valeurs d'une information* [210]) pour une information composable, définie par les 6 conditions suivantes :

(C_1) $F : \bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{\mathbb{R}}^+ \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$

(C_2) F est continue sur $\bar{\mathbb{R}}^+$

(C_3) F est symétrique en x et y

(C_4) F est associative : $F(x, F(y,z)) = F(F(x,y), z)$

(C_5) $F(x, +\infty) = x$

(C_6) si $x' < x''$ alors $F(x', y) \leq F(x'', y)$

d'où résulte que $F(x,y) \leq \mathrm{Inf}(x,y)$.

L'associativité leur permet de définir pour chaque entier n, la fonction F_n définie sur $(\bar{\mathbb{R}}^+)^n$ par la récurrence

$$F_1(x_1) = x_1\,, \quad F_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = F(F_n(x_1, \ldots x_n), x_{n+1})$$

Les recherches de Joseph Kampé de Fériet le conduisirent à des problèmes liés aux équations fonctionnelles et à participer à ce titre aux journées organisées par J. Aczel (cf. notamment ses publications [202], [205], [207], [219], [225], [230], [231]). A titre d'exemple, on peut citer son exposé donné en août 1972 à Oberwolfach : *Functional equations in the theory of Information* [225].

Le problème qu'il y résout est le suivant : si J est une mesure d'Information composable, de loi de composition régulière F, si $f : \bar{\mathbb{R}}^+ \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$, continue et strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(+\infty) = +\infty$, posant $\hat{J}(A) = f(J(A))$ on définit une nouvelle mesure d'information composable, de loi de composition $\hat{F}$ vérifiant l'équation fonctionnelle $f \circ F(x,y) = \hat{F}(f(x), f(y))$.

Notant Λ et $\hat{\Lambda}$ les idempotents respectifs de F et $\hat{F}$, il prouve que si $\hat{\Lambda} = f(\Lambda)$, la donnée des deux lois F et $\hat{F}$ permet de déterminer f.

Information fournie par un ensemble d'observateurs - Indépendance

Dans une Note aux *Comptes rendus* du 20 Octobre 1969 *Mesures aléatoires d'information*, B. Schweizer et A. Sklar proposaient une généralisation de la notion d'Information. Ils assignaient à chaque élément d'une classe $\mathcal{C}$ de parties de Ω une fonction de répartition $K(A \mid x)$ qu'ils interprétaient comme « La probabilité que la quantité d'information dans l'ensemble A soit inférieure à x » et ils lui imposaient de vérifier quatre axiomes.

Joseph Kampé de Fériet dans une Note du 3 décembre 1969 :

Mesure de l'information par un ensemble d'observateurs indépendants [200]

relie la fonction $K(A \mid x)$ à la théorie de l'Information comme suit : il se donne un ensemble $\mathcal{O}$ d'observateurs notés ξ, une tribu $\mathcal{F}$ de parties de $\mathcal{O}$ et une probabilité λ sur $\mathcal{F}$. Il suppose que chaque observateur ξ assigne une mesure d'information $J_\xi(A)$ à la réalisation de l'événement $A \subset \Omega$.

Posant pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $K(A \mid x) = \lambda\{\xi\,;\, J_\xi(A) < x\}$, il prouve que K vérifie bien les conditions imposées par Schweizer et Sklar.

Il soulève en outre deux questions nouvelles :

En premier lieu, il se pose la question réciproque :

« Étant donnée une classe de variables aléatoires $X(A), A \in \mathcal{C}$, admettant comme fonctions de répartition une classe $K(A \mid x)$ satisfaisant les axiomes de Schweizer et Sklar, est-il possible de construire un espace probabilisé d'observateurs $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \lambda)$ tel que $J(A \mid \xi) = X(A)$? »

Il montre que ce problème admet une solution très simple si pour tout $A \in \mathcal{C}$, $K(A \mid x) = G\big(x/J(A)\big)$ où G est une fonction de répartition donnée et J une mesure d'Information. Cependant, en 1977, A. Sklar dans *Unsolvability of* *the general « Problème réciproque » for probabilistic and random Information spaces »* (Colloque international du CNRS, Cachan, 4–8 juillet 1977) énoncera : « It is shown in this paper that the general problem reciproque is unsolvable if the constructed random Information space is required to have either the same independence or the same compositivity properties as the original probabilistic Information space. »

Le second problème soulevé par Joseph Kampé de Fériet retint davantage son attention ; il supposait l'existence d'un « super observateur » qu'il dénommera H.Q. (Head Quarter) par la suite lequel sera censé avoir la connaissance simultanée de chacune des observations effectuées par les observateurs et leur attribuera le poids λ.

A titre d'exemple, il citait le cas d'un responsable de station météorologique, les observateurs n'étant alors autres que les différents appareils de mesure de la station.

Ceci l'amenait à définir l'information moyenne reçue par H.Q.

$$J_{H.Q.}(A) = \bar{J}(A) = \int_{\mathcal{O}} J_\xi(A)\,\mathrm{d}\lambda(\xi)$$

et à poser la question suivante : si pour λ-presque tout observateur ξ, l'Information J_ξ est composable, de loi de composition F_ξ, en est-il de même pour J et quelle relation lie sa loi de composition $\bar{F}$ aux F_ξ ?

Les premiers travaux qu'il consacra à ce problème se situent en 1970 et 1971 (cf. ses publications [204], [205] et [207]). Son résultat essentiel s'énonce comme suit.

En dehors du cas trivial où presque tous les observateurs emploient la même mesure d'Information en l'affectant d'un cœfficient

$$J_\xi(A) = \varphi(\xi) J(A) \;\forall A \in \mathcal{S}$$

l'existence des opérations F_ξ implique celle de $\bar{F}$ si et seulement si

(α) $F_\xi(x,y) = \mathrm{Inf}(x,y)$

$$\forall (x,y) \in \bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{\mathbb{R}}^+ \quad \text{si} \quad \xi \notin G \quad \text{avec} \quad \lambda(G) = 0 \quad G \quad \text{indépendant de } (x,y)$$

(β) $\lambda\{\xi, J_\xi(A) > J_\xi(B)\}\ \lambda\{\xi, J_\xi(A) < J_\xi(B)\} = 0$

$$\forall (A,B) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S},\ A \cap B = \emptyset$$

On a alors $\bar{F}(x,y) = \mathrm{Inf}(x,y)\ \forall (x,y) \in \bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{\mathbb{R}}^+$.

(cf. sa Note aux *Comptes rendus Mesure de l'Information par un ensemble d'observateurs* [204, p. 1018]).

En conclusion de cette Note, mettant en évidence le rôle joué par les conditions imposées, il évoquait le cas où les observateurs ξ ne peuvent observer qu'une partie E_ξ de Ω.

C'est cet aspect plus général qu'il reprit dans l'exposé *Mesure de l'information par un ensemble d'observateurs indépendants* [208], exposé présenté en septembre 1971 à Prague.

Faisant référence à l'étude entreprise dans sa Note évoquée ci-dessus, il indiquait « Nous reprenons cette étude en partant d'hypothèses plus générales ; d'une part, nous supposons qu'il peut exister une distorsion entre l'événement A et sa perception par l'observateur ξ et d'autre part, nous suggérons de remplacer la considération de la moyenne par une construction toute différente qui, dans le cas d'observateurs indépendants, est basée sur la définition d'une mesure d'information sur un espace produit. »

On retrouve aussi les résultats de sa communication de Prague dans l'exposé de synthèse sur ses travaux qu'il présenta les 24 novembre et 8 décembre 1971 à l'Institut Henri Poincaré, publié sous le titre *Mesure de l'Information fournie par un événement*.

Il y formule l'idée de distorsion comme suit cf. [208, p. 316–317],

« Quand l'événement ω se produit l'observateur ξ perçoit un événement ω_ξ

$$\omega_\xi = T_\xi \omega \ldots$$

nous désignerons par E_ξ la partie de Ω représentant l'ensemble des événements perçus par ξ

$$\Omega_\xi = T_\xi E_\xi \quad E_\xi \in \mathcal{S} \quad \text{(algèbre des événements observables)}$$

Nous supposons que la classe de parties de Ω_ξ

$$\mathcal{S}_\xi = T_\xi(\mathcal{S} \cap E_\xi)$$

est une algèbre. »

Il illustrait ceci par le cas d'un poste météorologique dont les observateurs sont les instruments de mesure, et notait que « la distorsion provient essentiellement du fait que chacun de ces observateurs a un seuil de réponse, au-dessous duquel il supprime les fluctuations trop rapides de la grandeur mesurée. »

Introduisant de nouveau le super-observateur $H.Q.$, pour donner une représentation de l'ensemble des observations $T_\xi \omega$ par $H.Q.$, il fut amené à définir comme suit les observateurs indépendants et leur représentation :

« Si lorsque toutes les observations $\omega_\xi = T_\xi \omega$, sauf celles d'un observateur quelconque 1, sont déjà connues, l'observation ω_1 peut être un point quelconque dans Ω_1.

« Si les observateurs sont indépendants, il est clair que $H.Q.$ doit représenter l'ensemble des observations par un point :

$$\hat{\omega} = \{\omega_\xi : \xi \in \mathcal{O}\}$$

de l'espace produit

$$\hat{\Omega} = \prod_{\xi \in \mathcal{O}} \Omega_\xi \,. \quad \text{»}$$

Un événement A étant réalisé, il apparaît à chaque observateur ξ sous la forme

$$A_\xi = T_\xi A \in \mathcal{S}_\xi$$

et $H.Q.$ représente l'ensemble des observations par le rectangle

$$\hat{A} = \prod_{\xi \in \mathcal{O}} A_\xi \subset \hat{\Omega}\,.$$

Sachant que chaque observateur ξ donne pour mesure de l'information fournie par A_ξ le nombre $J_\xi(A_\xi)$, Joseph Kampé de Fériet se pose la question :

« Comment définir l'information $\hat{J}(\hat{A})$ fournie à $H.Q.$ par la connaissance de l'ensemble des observations ?

Dans le cas de deux observateurs $\mathcal{O} = \{1, 2\}$, on obtient

$$\hat{J}(A_1 \times \Omega_2) = J_1(A_1) \quad \text{et} \quad \hat{J}(\Omega_1 \times A_2) = J_2(A_2)\,,$$

Informations marginales et l'hypothèse d'indépendance amène à poser :

$$\hat{J}(A_1 \times A_2) = J_1(A_1) + J_2(A_2) \text{ »}$$

Il notait que si l'on pose $J(A) = \frac{1}{n(A)}$ si A fini ($n(A) = \operatorname{card} A$), 0 sinon $\hat{J}(A_1 \times A_2)$ n'est pas composable alors que les Informations marginales le sont. Il prouve qu'en fait $\hat{J}, J_1$ et J_2 sont simultanément composables si et seulement si elles ont même opération de composition $\hat{F} = F_1 = F_2$ égale à :

$$F(x, y) = -c \operatorname{Log}\bigl(e^{-x/c} + e^{-y/c}\bigr) \quad \text{pour} \quad e^{-x/c} + e^{-y/c} \leq 1 \quad \text{avec} \quad c > 0$$

(Wiener - Shannon) ou $\operatorname{Inf}(x, y)$ pour $(x, y) \in \bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{\mathbb{R}}^+$.

Ces résultats l'amenèrent ultérieurement à réfléchir à la notion d'indépendance (cf. [229] et [232, p. 4]). En 1977, dans *Indépendance des événements en Calcul des Probabilités et en Théorie de l'Information*, [232], il notait :

« Le mot indépendance était utilisé en Physique, particulièrement en Mécanique et en Thermodynamique bien avant l'axiomatisation du Calcul des Probabilités ...

« Soit Σ un sytème qui peut se décomposer en une famille de parties $\Sigma_i, i \in I$, cet ensemble d'indices pouvant être fini ou infini quelconque, on dit que les parties Σ_i de Σ sont indépendantes si le point ω_i représentant l'état de la partie Σ_i peut être choisi arbitrairement dans l'espace des phases Ω_i lorsque les états de toutes les autres parties sont déjà choisis.

« Ceci équivaut à dire que l'espace des phases $\hat{\Omega}$ représentant l'état $\hat{\omega}$ du système total $\hat{\Sigma}$ est l'espace produit des espaces des phases correspondant aux parties Σ_i.

« La notion d'indépendance se confond pour nous avec la possibilité de cette représentation dans un espace produit. »

Ceci le conduit à ramener l'indépendance algébrique (M-indépendance au sens de Banach et Marczewski) d'une famille $\{\mathcal{A}_i, i \in I\}$ d'algèbres de parties d'un espace Ω à la notion d'espace produit grâce à un théorème d'isomorphisme purement ensembliste, indépendant de la théorie des probabilités en considérant l'espace produit :

$$\hat{\Omega} = \Omega_1 \times \Omega_2 \ldots \times \Omega_n \quad \text{où pour tout} \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad \Omega_i = \Omega$$

et l'algèbre $\hat{S}$ engendrée par les rectangles

$$\hat{R} = A_1 \times A_2 \ldots \times A_n \quad \text{où pour tout} \quad i\colon A_i \in \mathcal{A}_i\,.$$

Notant $D = \{\hat{\omega}\,;\, \omega_1 = \omega_2 \ldots \omega_n\}$ la diagonale de l'espace produit, l'indépendance algébrique des algèbres $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \ldots \mathcal{A}_n$ équivaut à dire que tout rectangle $\hat{R}$ non vide est non disjoint de D. Notant $\mathcal{S}$ l'algèbre de parties de Ω engendrée par les algèbres $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \ldots \mathcal{A}_n$, il rappelle le résultat dû à S. Shermann (*On denumerably independent families of Borels fields,* Amer. J. Math. vol. 72, (1950), p. 612–614)

« Les deux algèbres $\mathcal{S}$ et $\hat{\mathcal{S}}$ sont σ-isomorphes »

Il en déduit que « Ceci résout complètement le problème de l'indépendance en Calcul des Probabilités et en Théorie de l'Information. »

S'agissant du Calcul des Probabilités, il avait déjà établi en 1972 dans *Remarks on the definition of a Probability on a Product Space with given marginal Probabilities* [209] que dans la formule :

$$\hat{P}(A_1 \times A_2) = G(P_1(A_1), P_2(A_2))$$

où $P_1(A_1) = \hat{P}(A_1 \times \Omega_2)$ et $P_2(A_2) = \hat{P}(\Omega_1 \times A_2)$ et P_1 et P_2 sont non atomiques, on a nécessairement $G(x, y) = xy$. Compte tenu du théorème de Shermann, ceci ramène à la notion classique d'indépendance.

Dans le cas d'une mesure d'information, ceci le conduit à remettre en cause l'axiome d'indépendance qu'il avait énoncé sous la forme

$$J(A_1 \cap A_2) = J(A_1) + J(A_2)$$

dans sa première Note avec Bruno Forte en 1967.

Il note (cf. [229, p. 3]) « il est maintenant clair pour moi que cette relation est essentiellement liée à la forme spéciale de l'Information de Wiener – Shannon. »

Dès 1969, au Congrès de Prague, il avait déjà signalé que sous cette forme, la condition de compatibilité de cet axiome avec une opération de composition F ne peut être satisfaite pour des valeurs arbitraires des informations $J(A), J(B), J(C)$ que dans deux cas bien précis, celui de l'Information de Wiener – Shannon et celui de l'Information de type Inf.

Il en conclura

« Il faut donc remplacer l'addition par

$$J(A \cap B) = G(J(A), J(B)\,. \quad \text{»}$$

Revenant aux espaces produits, ceci le conduit à poser si :

$$\hat{E} = A_1 \times A_2 \cdots \times A_n : \; \hat{J}(E) = G_n(J_1(A_1), \ldots, J_n(A_n))$$

Il impose à $G = G_2$ d'être associative ce qui lui permet de définir G_n par récurrence et il pose la question :

« En supposant que chacune des Informations J_i admet une opération de composition régulière F_i, peut-on choisir G de manière que l'Information $\hat{J}$ possède aussi une opération de composition régulière ? »

Il montre que ceci suppose d'abord que $\hat{F}(x, y) = F_i(x, y),\ i = 1, 2, \ldots, n,$ énonce les conditions nécessaires et suffisantes que doit vérifier G, et souligne que F et G ne peuvent en général être choisies arbitrairement l'une de l'autre mais sont liées par l'équation fonctionnelle

$$G(x, F(y, z)) = F(G(x, y), G(x, z))$$

et conclut que « G définit sur $\bar{\mathbb{R}}^+$ un I-semi-groupe topologique admettant la valeur 0 pour unité et la valeur $+\infty$ comme zéro. » Il a étudié à plusieurs reprises et résolu cette équation fonctionnelle (cf. ses publications [229], [230], [231] et [232]).

Sur la base d'exemples, il note qu'en général F détermine G mais que, l'équation fonctionnelle est toujours vérifiée lorsque

$$F(x, y) = \mathrm{Inf}(x, y)\,,$$

ce qui souligne le rôle particulier de ce type d'Information qui va maintenant être envisagé au vu de ses publications.

Informations de type Inf**. Fonction caractéristique. Idéaux. Temps d'entrée**

Les informations de type Inf ont été étudiées de manière approfondie par Joseph Kampé de Fériet et Pietro Benvenuti dans trois Notes aux *Comptes rendus* parues en 1969, 1971 et 1973 sous les titres respectifs suivants :

Sur une classe d'Informations [191]
Idéaux caractéristiques d'une Information [206]
Informations de type Inf*, idéaux et filtres* [221]

Ils remarquèrent d'abord qu'une Information de type Inf vérifie toujours pour toute union finie d'événements :

$$J\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \operatorname*{Inf}_{i\in I} A_i \tag{2}$$

et ceci les amena à définir J comme étant de type $\mathrm{Inf}\,\sigma$ ou $\mathrm{Inf}\,c$ selon que cette égalité était en outre vérifiée pour toute union dénombrable ou toute union infinie quelconque.

Dans leur seconde publication, ils généralisèrent ceci (en supposant que J est une surjection de $\mathcal{S}$ sur $\bar{\mathbb{R}}^+$) en définissant pour un nombre transfini $\mathfrak{M}$ une Information J définie sur une $\mathfrak{M}$-algèbre $\mathcal{S}$ comme de type Inf $\mathfrak{M}$ si l'égalité 2 est vraie pour tout ensemble d'indices I de puissance inférieure ou égale à $\mathfrak{M}$.

Dès leur première publication, ils fournissent un exemple d'Information de type Inf c définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ à partir d'une fonction $\Phi : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}^+$ telle que $\mathrm{Inf}\{\Phi(\omega)\,;\,\omega \in \Omega\} = 0$ en posant :

$$J(A) = \mathrm{Inf}\{\Phi(\omega)\,;\,\omega \in A\}\,, \tag{3}$$

Φ est liée à J par $\Phi(\omega) = J(\{\omega\})$; ils la dénomment *fonction génératrice de* J. En sens inverse, les auteurs établissent qu'étant donné une classe $\mathcal{F}$ de parties de Ω, contenant Ω et l'intersection de deux éléments arbitraires de $\mathcal{F}$ non disjoints, si J est une Information de type Inf c définie sur $\mathcal{F}$, il est possible de construire sur $\mathcal{P}(\Omega)$ une Information J^* de type Inf c prolongeant J à partir d'une fonction caractéristique Φ définie par :

$$\Phi(\omega) = \mathrm{Sup}\{J(A)\,;\,A \in \mathcal{F}_\omega\}\,,$$

où $\mathcal{F}_\omega$ est la sous-classe de $\mathcal{F}$, non vide pour tout ω constituée par les éléments de $\mathcal{F}$ contenant ω, J^* étant comme ci-dessus définie à partir de Φ par

$$J^*(A) = \mathrm{Inf}\{\Phi(\omega)\,;\,\omega \in A\}\,;$$

J^* est l'unique prolongement de J si $\mathcal{F}$ contient les singletons.

Ils notent aussi que si Ω est un espace topologique séparé, toute fonction génératrice semi-continue inférieurement définit sur $\mathcal{P}(\Omega)$ une Information de type Inf c telle que $1/J$ soit une capacité de Choquet et ils énoncent une réciproque partielle pour un espace localement compact. Ils signalent aussi pour toute Information J de type Inf définie sur une algèbre $\mathcal{S}$, pour tout a tel que $0 \leq a < +\infty$, $\mathcal{I}_a = \{A : J(A) > a\}$ est un idéal de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{F}_a = \{A\,;\,J(A^c) > a\}$ est une base de filtre sur Ω (un filtre lorsque $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\Omega)$).

Le lien entre idéaux, Informations de type Inf et fonction caractéristique fut l'objet d'une étude approfondie dans leurs deux Notes suivantes.

Dans celle de 1971, ils supposent que les Informations étudiées sont définies sur une algèbre $\mathcal{S}$ de parties de Ω, qu'elles sont composables et que chacune d'elles est une surjection de $\mathcal{S}$ sur $\bar{\mathbb{R}}^+$.

Une information J étant ainsi définie, ils établissent que

$$\mathcal{I}_a = \{A\colon A \in \mathcal{S}, J(A) \geq a\}$$

est un idéal de $\mathcal{S}$ si et seulement si a est un idempotent pour l'opération de composition de J ; ceci leur permet d'établir que les Informations de type Inf sont les seules pour lesquelles $\mathcal{I}_a$ est un idéal de $\mathcal{S}$ pour tout $a \in \bar{\mathbb{R}}^+$; ces idéaux vérifient les propriétés suivantes :

$$\mathcal{I}_\infty \subset \mathcal{I}_b \subset \mathcal{I}_a \subset \mathcal{I}_o = \mathcal{S}\,, \quad 0 < a < b < +\infty$$

et pour tout $a \in \bar{\mathbb{R}}^+$

$$\mathcal{I}_a = \bigcap_{0 \leq c < a} \mathcal{I}_c\,.$$

J. Kampé de Fériet et P. Benvenuti les dénomment *idéaux caractéristiques* de J car à toute famille d'idéaux de $\mathcal{S}$ satisfaisant à ces deux propriétés correspond une et une seule Information de type Inf sur $\mathcal{S}$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{S} : J(A) = \mathrm{Sup}\{a \colon A \in \mathcal{I}_a\}\,.$$

Les auteurs établissent aussi qu'une Information J est de type Inf $\mathfrak{M}$ si et seulement si, pour tout $a \in \bar{\mathbb{R}}^+$, $\mathcal{I}_a$ est un $\mathfrak{M}$-idéal. Ils généralisent aussi la notion de fonction génératrice pour une Information de type Inf $\mathfrak{M}$ définie sur une $\mathfrak{M}$-algèbre $\mathcal{S}$ en établissant qu'il existe une et une seule fonction $\Phi : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}^+$, mesurable par rapport à $\mathcal{S}$ telle que

$$J(A) = \mathrm{Inf}\{\Phi(\omega)\,;\, \omega \in A\}\,.$$

Ils remarquent d'abord que Φ s'obtient à partir des idéaux caractéristiques $\mathcal{I}_a$ de J par

$$\Phi(\omega) = \sup\{a\,;\, \omega \in E_a\}\,,$$

où E_a est l'ensemble maximal de l'idéal $\mathcal{I}_a$. En sens inverse, Φ étant une application de Ω dans $\bar{\mathbb{R}}^+$, mesurable par rapport à $\mathcal{S}$, à valeurs denses sur $\bar{\mathbb{R}}^+$, notant :

$$\forall a \in \bar{\mathbb{R}}^+\,, \quad E_a = \{\omega\,;\, \Phi(\omega) \geq a\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_a = \{A\,;\, A \in \mathcal{S} \quad \text{et} \quad A \subset E_a\}\,,$$

ils en déduisent que les $\mathcal{I}_a$ sont les idéaux caractéristiques d'une information J telle que

$$J(A) = \mathrm{Inf}\{\Phi(\omega)\,;\, \omega \in A\}\,.$$

L'idéal $\mathcal{I}_a$ était respectivement défini dans leurs première et seconde Notes par :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_a &= \{A\,;\, A \in \mathcal{S}\,;\, J(A) > a\} \qquad \text{et} \\ \mathcal{I}_a &= \{A\,;\, A \in \mathcal{S}\,;\, J(A) \geq a\}\,; \end{aligned}$$

ceci les amène dans leur troisième Note à définir les deux familles d'idéaux :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_t^m &= \{A\,;\, A \in \mathcal{S} \quad J(A) > t\}\,, \quad 0 \leq t < +\infty\,, \\ &\qquad\qquad \text{dits idéaux caractéristiques minimaux,} \\ \mathcal{I}_t^M &= \{A\,;\, A \in \mathcal{S} \quad J(A) \geq t\}\,, \quad 0 \leq t \leq +\infty\,, \\ &\qquad\qquad \text{dits idéaux caractéristiques maximaux,} \end{aligned}$$

J désignant une Information de type Inf $\mathfrak{M}$ définie sur une $\mathfrak{M}_0$-algèbre $\mathcal{S}$ de parties de Ω avec $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{M}_0 \leq \mathrm{card}\,\Omega$.

Prouvant que ces deux familles d'idéaux se déduisent l'une de l'autre, ils énoncent leurs propriétés caractéristiques et prouvent que chacune d'elles caractérise une et une seule Information de type Inf $\mathfrak{M}$.

Les autres résultats de cette Note sont en lien étroit avec deux Notes aux *Comptes rendus* que Joseph Kampé de Fériet et Nguyen Trung Hung publièrent en 1972–73.

La première [217] parut le 9 octobre 1972 sous le titre :

On y trouve d'abord utilisée la notion d'Information conditionnelle que Joseph Kampé de Fériet avait déjà introduite à plusieurs reprises en particulier dans une Note aux *Comptes rendus* [204] et dans l'exposé de synthèse [216] donné en 1971 à l'Institut Henri Poincaré.

Dans cet exposé, considérant un ensemble $\mathcal{O}$ d'observateurs notés ξ utilisant la même mesure d'information J, chacun d'eux ne pouvant observer qu'une partie mesurable de Ω notée $\hat{E}_\xi$, il définissait l'information conditionnelle fournie par A par l'égalité suivante :

$$J_\xi(A) = J(A \mid \hat{E}_\xi) = J(A \cap \hat{E}_\xi) - J(\hat{E}_\xi)\,,$$

c'est cette définition qui est reprise dans la Note du 9 octobre 1972. Les auteurs partent d'un espace produit $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}_1 \times \hat{\Omega}_2$, de tribus $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ de parties de $\hat{\Omega}_1$ et $\hat{\Omega}_2$ et d'une tribu $\hat{\mathcal{S}}$ de parties de $\hat{\Omega}$ contenant la tribu produit de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$.

Ils supposent donnés une Information $\hat{J}$ définie sur $\hat{\mathcal{S}}$ et un élément $\hat{E}$ de $\hat{\mathcal{S}}$ d'information $\hat{J}(\hat{E})$ finie. Ils notent que les informations conditionnelles par rapport à $\hat{E}$ des cylindres mesurables $A_1 \times \Omega_2$ et $\Omega_1 \times A_2$ définissent respectivement sur $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ deux mesures d'information J_1 et J_2 par les égalités :

$$\begin{aligned} J_1(A_1) &= \hat{J}\big((A_1 \times \Omega_2) \cap \hat{E}\big) - \hat{J}(\hat{E})\,, \\ J_2(A_2) &= \hat{J}\big((\Omega_1 \times A_2) \cap \hat{E}\big) - \hat{J}(\hat{E})\,. \end{aligned}$$

Ils appliquent ce résultat au cas d'un ensemble d'épreuves noté $\mathcal{E}(\Omega, \mathcal{S}, I, X)$ où $(\Omega, \mathcal{S})$ est un espace mesurable, I un ensemble d'indices, X une application définie sur I à valeurs dans Ω qui définit le résultat des épreuves.

Posant $\hat{\Omega} = \Omega \times I$, ils introduisent deux éléments de la tribu produit de $\mathcal{S}$ et $X^{-1}(\mathcal{S})$, éléments notés $\hat{E}$ et $\hat{E}(A)$ dits ensemble des résultats des épreuves et ensemble des résultats où A est réalisé dans Ω, ces ensembles étant définis respectivement par les égalités :

$$\begin{aligned} \hat{E} &= \{(\omega, i)\,;\, \omega = X(i) \quad i \in I\} \quad \text{et} \\ \hat{E}(A) &= \{(\omega, i)\,;\, \omega = X(i) \in A \quad i \in I\} = (A \times I) \cap \hat{E}\,. \end{aligned}$$

Ils remarquent aussi que ce dernier ensemble peut également s'écrire :

$$\hat{E}(A) = (\Omega \times I(A)) \cap \hat{E} \quad \text{où} \quad I(A) = X^{-1}(A)\,.$$

Se donnant une Information $\hat{J}$ définie sur une tribu $\hat{S}$ incluant la tribu produit de $\mathcal{S}$ et $X^{-1}(\mathcal{S})$ telle que $\hat{J}(E)$ soit finie, ils définissent l'information $J(A)$ fournie par les réalisations de A au cours de l'ensemble d'épreuves comme égale à l'information conditionnelle de $\hat{E}(A)$ étant donné $\hat{E}$ et prouvent qu'elle est égale à l'information $J^*(I(A))$ fournie par la seule connaissance des indices des épreuves où A est réalisé ...

Pour établir une relation entre J et le temps d'entrée, ils se donnent une Information $\hat{J}$ de type Inf c définie par :

$$\hat{J}(A) = \inf\{\hat{\Phi}(\hat{\omega}) \quad \hat{\omega} = (\omega, i) \in \hat{A} \subset \hat{\Omega}\}\,,$$

dont la fonction génératrice $\hat{\Phi}$ ne dépend que de l'indice i soit

$$\hat{\Phi}(\hat{\omega}) = \varphi(i)\ i\colon I \to \bar{\mathbb{R}}^+ \quad \text{et} \quad \mathrm{Inf}\{\varphi(i) i \in I\} = 0 \to \hat{J}(E) = 0\,,$$

d'où $J(A) = J^*(I(A)) = \mathrm{Inf}\{\varphi(i)\,;\, i \in I(A)\}$. Lorsque I est partiellement ordonné, tel que $\mathrm{Inf}\, I^*$ existe pour tout I^* inclus dans I et φ vérifie $\varphi(\mathrm{Inf}\, I^*) = \mathrm{Inf}\, \varphi(I^*)$, ils obtiennent :

$$J(A) = \varphi(\mathrm{Inf}\, I(A))\,.$$

Ils étudient ensuite le cas particulier où Ω est l'espace des phases d'un système évolutif, $I = \mathbb{R}^+$ avec $i = t$, l'ensemble des épreuves $\mathcal{E}(\Omega, \mathcal{S}, \mathbb{R}^+, X)$ définissant l'évolution du système depuis l'instant initial, cette évolution étant décrite par la trajectoire $\omega = X(t)$ dont $\hat{E}$ est l'image dans l'espace temps $\hat{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}^+$. Posant $\varphi(t) = t$ et

$$\hat{J}(\hat{A}) = \mathrm{Inf}\{t\,;\, \hat{\omega} = (\omega, t) \in \hat{A} \subset \Omega\}\,,$$

d'où posant $\hat{A} = A \times \mathbb{R}^+$,

$$\hat{J}(\hat{A}) = J(A) = \mathrm{Inf}\, I(A) = \tau(A)\,,$$

temps d'entrée dans A ; le temps d'entrée dans A est donc une information de type $\mathrm{Inf}\, c$. Pour conclure, ils considèrent une famille d'ensembles d'épreuves $\mathcal{G}(\Omega, \mathcal{S}, I, \prime, \mathcal{F}, \lambda, X)$ où $\mathcal{O}$ est l'ensemble des observateurs ξ et $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \lambda)$ un espace probabilisé et ils supposent pour chaque i, $X(i, \xi)$ est λ-mesurable donc est une fonction aléatoire définie sur $I = \mathbb{R}^+$. Notant $I_\xi(A) = \{t\,;\, X(t, \xi) \in A\}$ puis

$$J_\xi(A) = \mathrm{Inf}\{t\,;\, t \in I_\xi(A)\} = \tau_\xi(A)\,,$$

temps aléatoire d'entrée dans A, ils soulignent que J_ξ est alors une Information aléatoire si τ_ξ définit un temps d'arrêt du processus ; les auteurs concluent en étudiant le cas particulier d'un processus de Markoff continu à droite et quasi continu à gauche.

Le lien entre temps d'entrée et Information est de nouveau étudié dans leur seconde Note [220] du 12 mars 1973.

Mesure de l'information, temps d'entrée et dimension de Hausdorff

où ils notent en préliminaire :

« Dans une Note précédente, nous avons montré que le temps d'entrée d'une trajectoire est une Information de type $\mathrm{Inf} - c$; nous résolvons le problème réciproque : sous quelles conditions une Information représente-t-elle un temps d'entrée ? »

Pour y parvenir, ils commencent par donner une méthode de construction d'une Information du type $\mathrm{Inf}\, \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ nombre transfini quelconque et en déduisent qu'étant donné une famille $\mu_t^*(\cdot)$ de mesures extérieures sur $\mathcal{P}(\Omega)$, $(t \in \bar{\mathbb{R}}^+)$ telle que pour $s < t$, $\mu_s^*(A) \leq \mu_t^*(A)$ pour tout $A \subset \Omega$ et $\mu_0^*(\Omega) > 0$, la fonction

$$J(A) = \sup\{t\,;\, t \in \bar{\mathbb{R}}^+\ \mu_t^*(A) = 0\}$$

est une information de type $\operatorname{Inf}\sigma$ sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

Faisant référence à des travaux antérieurs consacrés aux liens entre dimension de Hausdorff, σ-précapacité et mesure de l'information, ils illustrent le lien entre dimension de Hausdorff et Information en prouvant que « pour toute fonction θ vérifiant :

$$\begin{aligned}&\theta\colon [0, \operatorname{Dim}\Omega] \Rightarrow \bar{\mathbb{R}}^+ \quad \text{vérifiant}\\ &\theta(0) = +\infty\,, \qquad \theta(\operatorname{Dim}\Omega) = 0\,,\\ &\theta \quad \text{strictement décroissante, continue,}\end{aligned}$$

la fonction

$$J(A) = \theta(\operatorname{Dim} A)$$

est une information du type $\operatorname{Inf}\sigma$ sur $\mathcal{P}(\Omega)$. »

Ils généralisent ensuite le résultat établi dans leur première Note en considérant un ensemble d'épreuves $\mathcal{E}(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{R}^+, X)$ où $X\colon \mathbb{R}^+ \to \mathcal{P}(\Omega)$, résultat d'une épreuve à l'instant t est, non plus comme précédemment un état $\omega = X_t$, mais un ensemble d'épreuves $X_t \in \mathcal{P}(\Omega)$; X est donc une fonction multivoque, l'ensemble des états

$$E = \bigcup_{0 \leq t < +\infty} X_t$$

est non plus une trajectoire mais un *tube*.

Notant $E_t = \bigcup_{0 \leq s \leq t} X_s$ et se donnant une mesure extérieure μ^*, ils définissent le μ^*-temps d'entrée du tube dans A.

$$\tau(A \mid \mu^*) = \sup\{t\,;\, t \in \bar{\mathbb{R}}^+\ \mu^*(A \cap E_t) = 0\}$$

et ils établissent le résultat suivant.

« Si $\mu^*(X_0) > 0$, le μ^* temps d'entrée d'un tube est une Information de type $\operatorname{Inf}\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ étant le cardinal de l'idéal

$$\mathfrak{N}(\mu^*) = \{A\,;\, \mu^*(A) = 0\}\,. \quad »$$

Lorsque μ^* est la mesure de dénombrement, le temps d'entrée du tube est une Information de type $\operatorname{Inf} c$ et le lien entre Information de type $\operatorname{Inf} c$ et temps d'entrée d'un tube est alors illustré par leur théorème 2.

« Pour qu'une Information J sur $\mathcal{P}(\Omega)$ soit le temps d'entrée d'un tube, il faut et il suffit qu'elle soit de type $\operatorname{Inf} c$. »

De même, dans le cas d'un espace topologique séparé, ils donnent une condition nécessaire et suffisante pour que l'Information J sur $\mathcal{P}(\Omega)$ soit le temps d'entrée d'une trajectoire définie par une courbe.

Il convient ici de remarquer que la Note de Joseph Kampé de Fériet et Nguyen Trung Hung précède d'une semaine la troisième Note de Joseph Kampé de Fériet et Pietro Benvenuti parue le 16 avril 1973.

Les méthodes et résultats de ces deux Notes s'appuient donc naturellement. La seconde Note de Joseph Kampé de Fériet et Nguyen Trung Hung se conclut comme la première par la considération d'une famille d'ensembles d'épreuves

$\mathcal{G}(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{R}^+, \mathcal{O}, \mathcal{F}, \lambda, X)$; chaque observateur ξ appartenant à $\mathcal{O}$ ne connaît le point ω de Ω qu'avec une distorsion car ξ observe $T_\xi \omega$ et en supposant que l'ensemble d'épreuves représente les états d'un système évolutif, ξ observe à l'instant t l'état c'est-à-dire *le point* $X_t(\xi)$ et l'ensemble des observations de ξ est donc une trajectoire. Faisant intervenir leur super-observateur supposé avoir connaissance de toutes les observations, super-observateur qu'ils notent de nouveau $H.Q.$, ils remarquent que $H.Q.$ observe le tube défini par :

$$E_t = \bigcup_{\xi \in \mathcal{O}} \bigcup_{0 \leq s \leq t} X_s(\xi) \,.$$

Ceci étant, ils opposent deux types d'information fournies à $H.Q.$ par l'événement A.

La première est le temps d'entrée du tube

$$\begin{aligned} J_{HQ}(A) &= \sup\{t \,;\, t \in \bar{\mathbb{R}}^+ \,;\, A \cap E_t = \emptyset\} \\ &= \mathrm{Inf}\{J_\xi(A)\ \xi \in \mathcal{O}\} \,, \end{aligned}$$

où $J_\xi(A)$ est le temps d'entrée mesuré par l'observateur ξ.

La seconde notée $\hat{J}_{HQ}(A)$ fait appel au poids λ sur $\mathcal{O}$ (fiabilité des observateurs) destiné à écarter les observations aberrantes.

Elle est définie par :

$$\hat{J}_{HQ}(A) = \mathrm{Infess}\{J_\xi(A) \,;\, \xi \in \mathcal{O}\}$$

(l'infimum essentiel étant pris par rapport à λ).

Ils notent que, contrairement à la première, $\hat{J}_{HQ}$ n'est pas de type $\mathrm{Inf}\, c$; bien que toutes les informations $J_\xi(A)$ le soient, $\hat{J}_{HQ}$ est de type $\mathrm{Inf}\, \sigma$ c'est-à-dire telle que l'égalité

$$\hat{J}_{HQ}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \mathop{\mathrm{Inf}}_{i \in I}(\hat{J}_{HQ}(A_i))$$

n'est vérifiée que pour les ensembles d'indices I au plus dénombrables.

L'utilisation des fonctions multivoques dans cette publication est à rapprocher de celle que fera Joseph Kampé de Fériet dans une dernière série de publications lesquelles, bien que n'étant pas *stricto sensu* du domaine de la théorie de l'« Information généralisée », peuvent néanmoins être considérées comme étant un prolongement de la démarche qui l'avait déjà conduit à abandonner le cadre probabiliste pour définir l'Information ; ce cadre supposait réalisée une suite infinie d'essais indépendants. C'est cet aspect « fréquentiel » qu'il va quitter pour retrouver l'aspect « epistémologique » oublié depuis le XVIIIe siècle.

Probabilité épistémologique. Mesures de plausibilité et de crédibilité. Ensembles flous

A partir des années 70, Joseph Kampé de Fériet relit en détail les traités et des articles de R. von Mises, B. de Finetti, B. Koopman consacrés aux fondements du Calcul des Probabilités.

Simultanément, il s'intéresse aux travaux de deux mathématiciens américains Arthur P. Dempster et Glenn Shafer.

Dempster, statisticien de Harvard, avait publié en 1976 aux *Annals of Mathematical Statistics* un article :

Upper and lower probabilities induced by multivalued mapping

que Glenn Shafer prolongea en 1976 dans son livre

A mathematical theory of evidence

A la même époque, paraissait aux presses de l'Université de Cambridge un ouvrage de Ian Hacking consacré à l'histoire de la théorie des probabilités :

The emergence of probability

Joseph Kampé de Fériet lut attentivement chacun de ces ouvrages ainsi que des publications ultérieures de Shafer avec lequel il entra en correspondance.

A la même époque, il s'intéressa aussi aux articles de Lofti Zadeh conscacrés à la théorie des ensembles flous.

Ses trois derniers articles (dont le dernier posthume) furent le fruit de ses lectures et des échanges épistolaires qu'il eut avec Shafer et Zadeh.

Le premier de ces articles parut en 1980 aux publications de l'U.E.R. de Mathématiques Pures et appliquées de l'Université de Lille sous le titre

Une interprétation des mesures de plausibilité et de crédibilité au sens de G. Shafer et de la fonction d'appartenance définissant un ensemble flou de L. Zadeh [236]

Dans cet article, Joseph Kampé de Fériet commence par rappeler que le mot probabilité avait d'abord désigné le degré de certitude que l'on attache à une proposition ; c'est ce sens épistémologique que l'on trouvait déjà sous la plume de Nicole Oresme, évêque de Bayeux et ministre de Charles V, à la fin du XIV[e] siècle ; c'est aussi l'abus de l'utilisation de ce sens épistémologique que dénonça Blaise Pascal dans son pamphlet des *Provinciales* ; ce sens fut encore utilisé par Leibniz et même par Jacques Bernoulli dans *Ars conjectandi*.

Joseph Kampé de Fériet, s'appuyant sur l'ouvrage de Ian Hacking, signale que la coexistence de la probabilité au sens épistémologique et au sens « *fréquentiste* » avait amené De Moivre et Bayes à les distinguer en employant le mot « *chance* » pour l'interprétation fréquentiste, vocabulaire encore utilisé par Poisson en 1837 et Cournot en 1843.

Il notait en particulier que si p est une proposition et $\sim p$ son contraire, on ne peut, dans l'interprétation épistémologique écrire que l'inégalité :

$$P(p) + P(\sim p) \leq 1$$

Il faisait ensuite référence aux travaux de Shafer lequel, désignant par $\mathcal{B}el(A)$ la probabilité épistémologique qu'il dénomme fonction de crédibilité (Belief function) lui assigne les trois propriétés suivantes :

(B_1) $\mathcal{B}el\colon \mathcal{P}(\Omega) \Rightarrow [0,1]$

(B_2) $\mathcal{B}el(\emptyset) = 0 \quad \mathcal{B}el(\Omega) = 1$

(B_3) $\forall n \geq 1\ \mathcal{B}el\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \geq \Sigma(-1)^{\text{card}\, I+1}\mathcal{B}el\Big(\bigcap_{\substack{i\in I\\ \emptyset\neq I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}}} A_i\Big)$

Cette dernière condition exprime que la fonction de crédibilité est une fonction monotone d'ordre infini au sens de G. Choquet.

Shafer définit ensuite la plausibilité de l'événement A par l'égalité :

$$Pl(A) = 1 - \mathcal{B}el(A^c)\,.$$

Joseph Kampé de Fériet se proposa de donner une présentation des travaux de Dempster et de Shafer en utilisant un modèle qu'il avait déjà utilisé dans son article déjà cité.

Mesure de l'information par un ensemble d'observateurs

Reprenant ses notations antérieures, il se donne un ensemble Ω de points ω et suppose que l'état du système étudié est déterminé par un ensemble $\mathcal{O}$ d'observateurs ξ, chaque observateur ξ localisant ω dans une partie $\Gamma(\xi)$ de Ω.

Il suppose comme précédemment l'existence d'un super-observateur $H.Q.$ qui connaît toutes les localisations $\Gamma(\xi)$ et affecte un poids à $\mathcal{O}$ en définissant une probabilité λ sur une tribu $\mathcal{S}$ de parties de $\mathcal{O}$.

Il introduit alors les applications inverses supérieure et inférieure de l'application multivoque Γ de $\mathcal{O}$ dans Ω, définies pour tout sous-ensemble A de Ω par :

$$\begin{aligned}\Gamma^*(A) &= \{\xi\,;\,\Gamma(\xi)\cap A \neq \emptyset\}\,,\\ \Gamma_*(A) &= \{\xi\,;\,\Gamma(\xi) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \Gamma(\xi)\subset A\}\,.\end{aligned}$$

En particulier, il note :

$$\mathcal{O}^* = \Gamma_*(\Omega) = \Gamma^*(\Omega) = \{\xi\,;\,\Gamma(\xi)\neq\emptyset\}$$

qu'il suppose mesurable et de probabilité strictement positive.

Il définit ensuite les probabilités supérieure et inférieure de A en supposant d'abord $\Gamma^*(A)$ et $\Gamma_*(A)$ mesurables :

$$P^*(A) = \frac{\lambda(\Gamma^*(A))}{\lambda(O^*)} \quad \text{et} \quad P_*(A) = \frac{\lambda(\Gamma_*(A))}{\lambda(O^*)}$$

et étend leur définition à $\mathcal{P}(\Omega)$ en remplaçant λ par les mesures extérieure et inférieure induites par λ sur $\mathcal{P}(\Omega)$ soit

$$P^*(A) = \frac{\lambda^*(\Gamma^*(A))}{\lambda(O^*)} \quad \text{et} \quad P_*(A) = \frac{\lambda_*(\Gamma_*(A))}{\lambda(O^*)}\,.$$

Ceci lui permet de prouver que ces deux fonctions s'identifient aux définitions de A.P. Dempster ; de plus la probabilité inférieure $P_*(A)$ satisfait à la définition axiomatique posée par Glenn Shafer pour la fonction de crédibilité $\mathcal{B}el(A)$ tandis que $P^*(A)$ n'est autre que la plausibilité de A.

Il conclut : « Nous pensons que cette théorie constitue le cadre le mieux adapté à une formulation mathématique des probabilités épistémologiques. »

Il fait ensuite le lien avec la théorie des ensembles flous en notant : « Pour nous la fonction d'appartenance $\mu\{\omega\}$ est interprétée comme la mesure de la plausibilité par $H.Q.$ que le singleton $\{\omega\}$ représente l'état du système observé. »

Cette étude est reprise dans ses deux dernières publications :

Measure of Information, Plausibility, Belief function, Possibility and Fuzzy sets [237]

d'une part, dont les résultats furent repris et complétés dans

Interprétation of membership functions of fuzzy sets in terms of plausibility and belief [238],

publication posthume.

Après avoir remarqué que la plausibilité d'un singleton est une fonction d'appartenance, il énonce dans la première publication une réciproque : « For any membership function $\mu\{\omega\}$ defining a fuzzy set on Ω, there exists always a set of observers θ, weighted by a weight Λ such that the plausibility measured by $H.Q.$ verifies :

$$\forall\omega \in \Omega \quad P^*(\{\omega\}) = \mu(\omega)$$

Furthermore, this set is at most countable » et il conclut :

« On the other hand, it is clear that from the values $P^*(\{\omega\}), H.Q.$ can also deduce a possibility measure by setting simply :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)\ ,\ \pi(A) = \sup\{P^*(\{\omega\}), \omega \in A\}\,. \quad »$$

Dans sa seconde publication, il élargit sa recherche en indiquant d'abord que de tout ensemble d'observations, on peut, en utilisant soit la mesure de plausibilité d'un singleton soit sa crédibilité, déduire la définition de deux ensembles flous en général distincts et il étudie ensuite la réciproque.

Pour être complet sur ce sujet, il faudrait aussi mentionner sa conférence non publiée

Que signifie probabilité ? Remarques historiques et épistémologiques donnée le 9 mars 1978 au séminaire de statistique de l'Université de Lille I.

Bon nombre de publications qu'il consacra à sa nouvelle théorie de l'information y firent aussi l'objet d'exposés publiés ou non auxquels assistait notamment le groupe de chercheurs qui participaient activement à ses travaux dont Claude Langrand, Joseph Losfeld, Nguyen Trung Hung, Gérard Comyn, Serge Lapiquonne ...

Outre ceux-ci, il faut aussi mentionner en premier lieu Bruno Forte et Pietro Benvenuti coauteurs avec lui de ses premiers travaux dans ce domaine. Leur propagation en Italie fut très rapide et donna lieu à l'éclosion de nombreux travaux dont ceux de Nicolo Pintacuda, C. Baiocchi, C. Bertoluzza ....

On trouvera ci-après une bibliographie établie par Claude Langrand en 1973–1975 des principaux travaux consacrés à la nouvelle théorie de 1967 à 1975.

On a déjà vu les problèmes mathématiques qu'elle souleva notamment ceux liés aux équations fonctionnelles d'où l'apport à la théorie nouvelle des professeurs J. Aczel et Zoltan Daroczy.

Pour répondre à certaines réserves parfois émises émettant des doutes quant aux applications de la théorie nouvelle, il suffirait de se référer aux travaux liés à la théorie des questionnaires alors entrepris par Claude Picard et ses élèves du groupe *Structures de l'Information* de l'Université Pierre et Marie Curie, ceux du professeur Michel Schneider et de son équipe à Clermont Ferrand, ceux de l'équipe du professeur Michel Terrenoire à l'université de Lyon I et ceux entrepris par J. Sallantin en vue d'appliquer la théorie nouvelle à la mécanique quantique, travaux entrepris à l'instigation de Gérard Petiau.

L'apport de la théorie nouvelle était souligné par Claude François Picard en avant-propos du colloque de Cachan du 4 au 8 juillet 1977.

Pour conclure sur ce point, citons Jean Dieudonné, alors président du CIRM de Luminy dans sa préface aux Actes des Rencontres de Marseille - Luminy tenues du 4 au 7 juin 1973, consacrées aux « *Théories de l'Information.* »

« Il convient d'attirer particulièrement l'attention sur les contributions à ce volume suscitées par la nouvelle direction imprimée à la théorie de l'information par MM. J. Kampé de Fériet et B. Forte depuis 1967. En cherchant à dégager cette théorie de ses liens trop étroits avec le Calcul des Probabilités, ils ont été amenés à l'axiomatiser de manière originale et il semble bien que se manifestent déjà les conséquences heureuses qui découlent d'une axiomatisation bien faite : élargissement de vues conduisant à un approfondissement des théories existantes et nouvelles voies ouvertes tant en ce qui concerne les spéculations théoriques que le champ des applications diverses. »

Théorie de l'Information

Références

ACZEL, J. *On different characterizations of entropies,* Proc. Int. Symposium Prob. and Information theory, Mc Master Univ, Canada, April 1968. Lectures notes in Math, **89**, Berlin, Heidelberg. New York, Springer, 1–11, 1969.

ACZEL, J. *On measures of information and their characterizations,* Proc. Meeting on information measures, Kitchener-Waterloo, Ontario, Canada, April 10–14. Univ. of Waterloo, Ontario, Canada, 1970.

ACZEL, J., FORTE, B., NG, C.T. *L'équation fonctionnelle triangulaire ; son application à une généralisation de l'équation de Cauchy,* C.R. Acad. Sc., Paris, **275**, sér. A, 605–607, 1972.

ACZEL, J., FORTE, B., NG, C.T. *L'équation fonctionnelle triangulaire et la théorie de l'information sans probabilité,* C.R. Acad. Sc., Paris, **275**, sér. A, 727–729, 1972.

ACZEL, J., FORTE, B., NG, C.T. *On a triangular functionnal equation and some applications in particular to the probabilistic theory of information without probability,* (to the memory of R.S. Varma), Aequationes Mathematicae, 1972.

AGGARWAL, N.L. *Mesures d'information et questionnaires arborescents,* Thèse de Doctorat ès Sciences Mathématiques, Besançon, 1974.

BAIOCCHI, C. *Su un sistema di equazioni funzionali connesso con la teoria dell'informazione,* Boll, Un. Mat. Ital. 2-**23**, 236–246, 1967.

BAIOCCHI, C. *Sur une équation fonctionnelle liée à la théorie de l'information,* Proc. 7th Inter. Symposium on functional equations, Waterloo–Dwight, Ont, Canada, 5–6, 1969.

BAIOCCHI, C., PINTACUDA, N. *Sull'assiomatica della teoria dell'informazione,* Ann. Mat. Pura e Appl. IV, **80**, 301–326, 1968.

BAKER, J.A., FORTE B., LAM, L.F. *On the existence of a collector for a class of information measures,* Utilitas mathematica, **2**, 219–239, 1972.

BENVENUTI, P. *Sulle soluzioni di un sistema di equazioni funzionali nella teoria dell'informazione,* Rend. di Mat., VI, **2**, 99–109, 1969.

BENVENUTI, P. *Sulle misure d'informazione compositive con traccia compositiva universale,* Rend. di Mat., VI, **2**, 481–506, 1969.

BENVENUTI, P., DIVARI, M., PANDOLFI, M. *Su un sistema di equazioni funzionali proveniente dalla teoria soggettiva della informazione,* Rend. di Mat., VI, **5**, 529–540, 1972.

Bertoluzza, C. *Sulla informazione condizionale,* Statistica, **28**, 242–245, 1968.

Bertoluzza, C., Schneider, M. *Informations totalement composables,* Actes des Rencontres de Marseille Luminy 5–7 juin 1973, Théories de l'Information, Lectures Notes in Mathematics **398**, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 90–98, 1974.

Cicileo, H., Forte, B. *Measures of ignorance, information and uncertainty.* Part. I, Calcolo, **8**, 3, 215–236, 1971.

Comyn, G. *Introduccion a la teoria de la Informacion generalizada,* Centro nacional de computation, Universidad nacional de Asuncion, Paraguay, 90 p., 1974.

Comyn, G., Losfeld, J. *Application de l'information généralisée à l'analyse des données statistiques,* C.R. Acad. Sc., Paris, **276**, Sér. A, 1075–1078, 1973.

Comyn, G., Losfeld, J. *Information généralisée sur une quasi-partition et information moyenne,* C.R. Acad. Sc., Paris, **276**, Sér. A, 1373–1376, 1973.

Comyn, G., Losfeld, J. *Définition d'une information composable sur un treillis,* C.R. Acad. Sc. Paris, **278**, Sér. A, 633–636, 1974.

Daroczy, Z. *Uber ein Funktionalgleichlungsystem der Informations-theorie,* Aequationes Math., **2**, 144–149, 1969.

Forest, F. *Une application de l'information hyperbolique à la recherche documentaire,* Thèse de doctorat de troisième cycle, Université de Paris VI, Paris, 1974.

Forte, B. *Information without probability and Shannon's entropy,* Proc. of the Coll. on information theory, Debrecen, Hungary, 29–31, 1967.

Forte, B. *Measures of information,* the general axiomatic theory, Rev. Inform. Rech. Oper., **3**, R. 2, 63–90, 1969.

Forte, B. *On a system of functional equations in Information theory,* Aequationes mathematicae, **5**, 202–211, 1970.

Forte, B. *The continuous solutions of a system of functional equations in Information theory,* Rend. di Mat., VI, (3), **3**, 1–21, 1970.

Forte, B. *Generalized measures of information and uncertainty,* Proc. Meeting on information measures, Kitchener–Waterloo, Ontario, Canada, april 10–14, Univ. of Waterloo, Ontario, Canada, 1970.

Forte, B. *Applications of functional equations and inequalities to information theory,* corso tenuto a La Mendola (Trento) dal 20 al 28 agosto, C.I.M.E. Functional equations and inequalities, Roma, Ed. Cremonese, 113–140, 1971.

FORTE, B. *Information and probability : collectors and compositivity,* Symposia Mathematica, **IX**, 121–129, 1972.

FORTE, B., BENEVENUTI, P. *Su una classe di misure di informazione regolari a traccia shannoniana,* Atti. Sem. Mat. Univ. Modena, **18**, 99-108, 1969.

FORTE, B., DAROCZY, Z. *Sopra un sistema di equazioni funzionali nella teoria dell'informazione,* Ann. Univ. Ferrara, 13 **6**, 67–75, 1968.

FORTE, B., NG, C.T. *Entropies with branching property,* Univ. of Waterloo, Ontario, Canada, 1973.

FORTE, B., PINTACUDA, N. *Information fournie par une expérience,* C.R. Acad. Sc., Paris, **266**, Sér. A, 242–245, 1968

FORTE, B., PINTACUDA, N. *Sull'informazione associata alle esperienze incomplete,* Ann. Mat. Pura e Appl., 4, **80**, 215–134, 1968

FORTE, B., PORITZ, D. *Information and probability : collectors and Shannon compositivity,* Jabresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung, 1973.

GRIMONPREZ, G., VAN DORPE, J.C. *Informations généralisées et questionnaires.* Séminaire sur les Questionnaires, Université de Paris VI, 23 janvier 1975.

KAMPÉ DE FÉRIET, J. *Mesures de l'information par un ensemble d'observateurs,* C.R. Acad. Sc., Paris, **269**, Sér. A, 1081–1085, 1969.

KAMPÉ DE FÉRIET, J. *The composition law in Information theory,* Reports of Meetings, 7 th. Int. Symp. Functional Equations, Waterloo, 16–18, 1969.

KAMPÉ DE FÉRIET, J. *Mesure de l'information par un ensemble d'observateurs,* C.R. Acad. Sc., **271**, Sér. A, 1017–1021, 1970.

KAMPÉ DE FÉRIET, J. *The composition law in information theory,* Aequationes mathematicae, **4**, 216–218, 1970.

KAMPÉ DE FÉRIET, J. *Mesure de l'information fournie par un événement,* Colloques Internationaux, CNRS, **186**, Clermont-Ferrand, CNRS, Paris 191–221, 1970.

KAMPÉ DE FÉRIET, J. *Measure of information by a set of independent observers : a functional equation,* Corso tenuto a La Mendola (Trento) dal 20 al 28 agosto 1970, C.I.M.E., Functional equations and inequalities, Roma, Ed. Cremonese, 163–193, 1971.

KAMPÉ DE FÉRIET, J. *Composition law of the mean information,* Aequationes Mathematicae, **6**, 101, 1971.

KAMPÉ DE FÉRIET, J. *Measure of information by a set of observers,* Aequationes Mathematicae, **8**, 159–161, 1972.

Kampé de Fériet, J. *Mesure de l'information fournie par un événement,* séminaire sur les questionnaires, 24 nov. – 8 déc. 1971, Structures de l'Information Institut Henri Poincaré, Paris, 1972.

Kampé de Fériet, J. *Note di teoria dell'informazione,* redatte da G. Maschio, Istituto di matematica applicata, Roma, 123 p., 1972.

Kampé de Fériet, J. *Sur une équation fonctionnelle de la théorie de l'information généralisant l'équation de Cauchy,* Demonstratio Mathematica, **VI**, 665–685, 1973.

Kampé de Fériet, J. *Mesure de l'information par un ensemble d'observateurs indépendants,* Transactions of the sixth Prague Conference on Information theory, Statistical Decision Functions, Random Processes, Prague, 19–25 sept. 1971, 315–329, 1973.

Kampé de Fériet, J. *Definizione generale della misura dell'informazione fornita da un evento,* Seminario interdisciplinaro di Venezia, 28 mai – 1er juin 1973, Teoria dell'informazione, Il Mulino, Bologna, 29–43, 1974.

Kampé de Fériet, J. *La théorie généralisée de l'Information et la mesure subjective de l'Information,* Actes des Rencontres de Marseille-Luminy 5–7 juin 1973, Théories de l'Information, Lectures notes in Mathematics **398**, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1–35, 1974.

Kampé de Fériet, J. *Information sémantique et information de localisation : description d'un univers,* Publication de l'U.E.R. de Maths no 22, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1974.

Kampé de Fériet, J. *Functional Equations in the theory of Information,* Xe internationale Tagung über Funktionalgleichungen, Oberwolfach, 30 juillet – 5 août 1972, Aequationes Mathematicae, **10**, 294–295, 1974.

Kampé de Fériet, J. *Une inégalité fonctionnelle de la Théorie de l'Information : définition d'une métrique sur un espace d'Information,* 12th International Symposium on Functional Equations, 30 août – 9 septembre 1974, Victoria Harbour, Ontario Canada, Aequationes Mathematicae, 1975.

Kampé de Fériet, J., Benvenuti, P. *Sur une classe d'informations,* C.R. Acad., Sc., Paris, **269**, 97–101, 1969.

Kampé de Fériet, J., Benvenuti, P. *Idéaux caractéristiques d'une information,* C.R. Acad. Sc., Paris, **272**, Sér. A, 1467–1470, 1971.

Kampé de Fériet, J., Benvenuti, P. *Opération de composition régulière et ensemble de valeurs d'une information,* C.R. Acad. Sc., Paris, **274**, Sér. A, 655–659, 1972.

Kampé de Fériet, J., Benvenuti, P. *Information du type* Inf, *idéaux et filtres,* C.R. Acad. Sc., Paris, **276**, Sér. A, 1123–1128, 1973.

KAMPÉ DE FÉRIET, J., FORTE, B. *Information et probabilité,* C.R. Acad. Sc., Paris, **265**, Sér. A, 110–114, 1967.

KAMPÉ DE FÉRIET, J., FORTE, B. *Information et probabilité,* C.R. Acad. Sc., Paris, **265**, Sér. A, 142–146, 1967.

KAMPÉ DE FÉRIET, J., FORTE, B. *Information et probabilité,* C.R. Acad. Sc., Paris, **265**, Sér. A, 350–353, 1967.

KAMPÉ DE FÉRIET, J., FORTE B., BENVENUTI, P. *Forme générale de l'opération continue d'une information,* C.R. Acad. Sc., Paris, **269**, 529–534, 1969.

KAMPÉ DE FÉRIET, J., NGUYEN-TRUNG HUNG *Temps d'entrée d'un processus stochastique et mesure de l'information,* C.R. Acad. Sc., Paris, **275**, Sér. A, 721–725, 1972.

KAMPÉ DE FÉRIET, J., NGUYEN-TRUNG HUNG *Mesure de l'information, temps d'entrée et dimension de Hausdorff,* C.R. Acad. Sc., Paris, **276**, Sér. A, 807–811, 1973.

LANGRAND, C. *Constructions de m-précapacités,* C.R. Acad. Sc., Paris, **275**, Sér. A, 1243–1246, 1972.

LANGRAND, C. *Information généralisée ; estimation et sélection.* Thèse de doctorat es sciences mathématiques, Lille, 1973.

LANGRAND, C. *Mesures extérieures d'information,* C.R. Acad. Sc., Paris, **276**, Sér. A, 703–706, 1973.

LANGRAND, C. *Composabilité d'une mesure d'information limite de mesures d'information composables,* C.R. Acad. Sc., Paris, **279**, Sér. A, 727–730, 1974.

LANGRAND, C. *Précapacités fortes et mesures d'information,* Actes des Rencontres de Marseille–Luminy 5–7 juin 1973, Théories de l'Informations, Lectures notes in Mathematics **398**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 36–48, 1974.

LANGRAND, C., NGUYEN-TRUNG HUNG *Sur les mesures intérieures de l'information et les σ-précapacités,* C.R. Acad., Sc., Paris, **275**, Sér. A, 927–930, 1972.

LAPIQUONNE, S. *Ensemble des valeurs des informations du type M ou M',* C.R. Acad., Sc., Paris, **274**, Sér. A, 1319–1322, 1972.

LAPIQUONNE, S. *Sur les ensembles de valeurs d'une information généralisée,* Thèse de doctorat de spécialité, Lille, 1972.

LOSFELD, J. *Information moyenne dans une épreuve statistique,* C.R. Acad. Sci. Paris, **275**, Sér. A, 509–512, 1972.

LOSFELD, J. *Information fournie par un ensemble d'observateurs et applications aux questionnaires et à l'analyse des données,* Thèse de doctorat es sciences mathématiques, Lille, 1974.

LOSFELD, J. *Information généralisée et relation d'ordre,* Actes des Rencontres de Marseille–Luminy 5–7 juin 1973, Théories de l'Information, Lectures notes in Mathematics **398**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 49–61, 1974.

MILISCI, V. *Un teorema di rapresentazione delle informazioni M-compositive,* Rendiconti di Matematica, **5**, Sér. VII, 271–281, 1972.

NGUYEN-TRUNG HUNG. *Mesures d'informations, capacités positives et sous-mesures,* C.R. Acad. Sci. Paris, **275**, Sér. A, 441–443, 1972.

NGUYEN-TRUNG HUNG. *Mesures d'informations sur les ensembles ordonnés* C.R. Acad. Sci. Paris, **278**, Sér. A, 1139–1142, 1974.

NGUYEN-TRUNG HUNG. *Sur les mesures d'Information de type* Inf, Actes des Rencontres de Marseille–Luminy 5–7 juin 1973, Théories de l'Information, Lectures notes in Mathematics **398**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 62–75, 1974.

NGUYEN-TRUNG HUNG. *Information fonctionnelle et ensembles flous.* Séminaire sur les Questionnaires, Université de Paris VI, 27 février, 1975.

PETOLLA, S., PICARD, C. *Axiomatique et systématique des questionnaires,* Actes des Rencontres de Marseille–Luminy 5–7 juin 1973, Théories de l'Information, Lectures notes in Mathematics **398**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 126–151, 1974.

PICARD, C.F. *Probabilités sur des graphes et information traitée par des questionnaires,* Transactions of the sixth Prague Conference on Information theory, Statistical Decision Functions, Random Processes Prague, 19–25 sept. 1971, 695–713, 1973.

PICARD, C.F. *Dépendance et indépendance d'expériences,* C.R. Acad. Sci. Paris, **276**, Sér. A, 1237–1240, 1973.

PICARD, C.F. *Expériences dépendantes et conditionnement en information hyperbolique,* C.R. Acad. Sci. Paris, **276**, Sér. A, 1369–1372, 1973.

PICARD, C.F., SCHNEIDER, M. *Information du type M transmise par un questionnaire latticiel,* C.R. Acad. Sci. Paris, **274**, Sér. A, 660–663, 1972.

PINTACUDA, N. *Prolongement des mesures d'information,* C.R. Acad. Sci. Paris, **269**, Sér. A, 861–864, 1969.

SALLANTIN, J. *Systèmes de propositions et informations,* C.R. Acad. Sci. Paris, **274**, Sér. A, 986–988, 1972.

SALLANTIN, J. *Informations pures sur un système de propositions,* C.R. Acad. Sci. Paris, **275**, Sér. A, 65–68, 1972.

SALLANTIN, J. *Information, systèmes de propositions et logique de la mécanique quantique,* Thèse de Doctorat de 3[e] cycle, Univ. de Paris VI, Paris, 1972.

SALLANTIN, J. *Informations et Trajectoires sur un système de propositions,* Actes des Rencontres de Marseille–Luminy 5–7 juin 1973, Théories de l'Information, Lectures notes in Mathematics **398**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 76–89, 1974.

SCHNEIDER, M. *Information généralisée et questionnaires,* Thèse de Doctorat de Spécialité, Lyon, 1970.

SCHNEIDER, M., BERTOLUZZA, C. *Solution d'une équation fonctionnelle de la théorie de l'information,* C.R. Acad. Sci. Paris, **277**, Sér. A, 539–541, 1973.

SCHWEIZER, B., SKLAR, A. *Mesures aléatoires de l'information,* C.R. Acad. Sci. Paris, **269**, Sér. A, 721–723, 1969.

SCHWEIZER, B., SKLAR, A. *Mesure aléatoire de l'information et mesure de l'information par un ensemble d'observateurs,* C.R. Acad. Sci. Paris, **272**, Sér. A, 149–153, 1971.

CONCLUSION

Ce qui précède avait pour but d'évoquer la carrière d'enseignant et de chercheur de Joseph Kampé de Fériet.

Le curriculum vitæ qu'il établit en 1966 est joint en annexe ; il permet de percevoir la considération que lui ont toujours témoignée les milieux scientifiques pour chacune des activités qu'il a exercées depuis le début de sa carrière.

Membre de nombreuses sociétés savantes et du Conseil national de la recherche scientifique auquel il appartint de 1950 à 1963, il a aussi accompli de nombreuses missions scientifiques à l'étranger.

A ce titre, et pour toute son activité scientifique, il fut promu Officier de la Légion d'Honneur en mai 1954 et Commandeur dans l'Ordre National du Mérite en 1971.

Docteur Honoris Causa des universités de Gand et de Bologne, membre de plusieurs académies étrangères, il fut élu le 14 juin 1954 membre correspondant de la section mécanique de l'Académie des Sciences et, depuis lors, il participa régulièrement à ses séances ce qui lui permettait de revoir de nombreux amis.

A la demande de l'Académie, il eut l'occasion de la représenter aux cérémonies et au congrès qui se déroulèrent à Hanovre à l'occasion du 250ᵉ anniversaire de la mort de Leibniz. Lors de la séance inaugurale du 14 novembre 1966, il mit en relief dans son allocution les liens de Leibniz avec l'Académie des Sciences dont il fut le premier membre associé étranger. Il souligna aussi combien le séjour que Leibniz effectua à Paris de 1672 à 1676 contribua à l'évolution de sa pensée mathématique. Il en rendit compte à l'Académie à la séance du 21 novembre 1966 et le texte de ses interventions à Hanovre et à l'Académie fut publié dans les *Comptes rendus.*

Le 30 janvier 1971, Monsieur François-Xavier Ortoli, ministre du développement industriel et scientifique, au moment de remettre à Joseph Kampé de Fériet les insignes de Commandeur dans l'Ordre National du Mérite, soulignait avec insistance :

« Vous présentez un cas peu fréquent dans les milieux universitaires, celui d'une carrière qui s'est déroulée entièrement dans une seule ville ; alors que vos collègues aussitôt nommés en province n'ont que la hâte de retourner à Paris, vous-même, parisien par votre naissance et par vos études, vous n'avez jamais quitté la Faculté des Sciences de Lille. »

Il convient ici d'ajouter que, depuis 1919, Joseph Kampé de Fériet a toujours participé activement à la vie locale et apporté son concours à de nombreuses institutions. Il demeurait attaché à la ville où il avait effectué toute sa carrière et à toutes les amitiés qu'il avait su y nouer.

Excellent conférencier et enseignant soucieux d'une grande clarté, il sait se mettre à la disposition des auditoires les plus divers.

Ses amis ont toujours cité le cas d'un exposé consacré au calcul des probabilités qu'il sut faire en termes très intelligibles à de jeunes scouts.

C'est ce même thème qu'il évoquera en 1945 dans la conférence

Hasard et probabilité dans la pensée scientifique contemporaine [82] conférence donnée aux membres de la société des Sciences, des Arts et de l'Agriculture de Lille.

Appartenant à cette société savante depuis 1935 et qu'il présida en 1954–55, il la savait composée de mathématiciens, de physiciens, de chimistes, de naturalistes mais aussi de juristes, de littéraires, d'artistes et d'agronomes et il évoqua en termes très simples l'apport du calcul des probabilités. Avec humour, il fit débuter le texte de cette conférence par la très célèbre exclamation de Louis de Montalte

« *Que ces probabilités sont utiles !* »

extraite des Provinciales de Blaise Pascal.

Il notait aussi en introduction

« L'exclamation de Louis de Montalte ... ne serait-elle pas encore plus justifiée ... en découvrant la transformation que la Physique moderne nous propose depuis quelques décades de faire subir à l'image du monde. »

L'ensemble de son exposé illustrait la citation d'Henri Poincaré (« Science et méthode » p. 64–65) opposant le hasard qui n'est autre que « la mesure de notre ignorance » à l'indétermination fondamentale clé de la physique moderne.

De même, aux membres du Rotary-Club de Lille qu'il présida en 1949–50, il sut exposer en termes simples les problèmes de mécanique et de balistique posés par le lancement des premiers satellites ou leur parler d'une visite faite à l'observatoire astronomique du Mont Palomar car, de ses années d'études universitaires il avait gardé une vive curiosité pour les questions liées à la mécanique céleste et à l'astronomie ; ce cadre rotarien lui donna aussi l'occasion avec son ami Jean Caroni et bien d'autres, d'œuvrer activement pour un rapprochement franco-allemand.

Intéressé par l'histoire des mathématiques, il donna le 2 février 1937 à la station de Radio PTT Nord une causerie

Ce que la Mathématique doit à Descartes [61]

reproduite le 15 avril dans une publication de la faculté des lettres de l'Université de Lille.

Après avoir cité le « Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences, plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie qui sont des essais de cette méthode, » il notait que : « La Géométrie conçue comme un prolongement et une illustration du Discours de la Méthode a dépassé son premier but, acquis une vie autonome, débordant de beaucoup le cadre primitif du philosophe ....

« Nul champ d'expérience, il faut le reconnaître ne pouvait être plus merveilleusement choisi : au particularisme des vieilles méthodes, cloisonnant chaque problème dans le moule d'un raisonnement spécial, l'introduction du nombre en Géométrie substitue avec l'universalité du mode de déduction, une possibilité de graduation dans les problèmes qui met en un relief saisissant la méthode cartésienne. »

A la demande de son neveu, le professeur Gabriel Decroix, il prononça une allocution au 74^{e} Congrès français d'Oto-rhino-laryngologie où il traita des rapports entre la médecine et les mathématiques, évoquant l'ultraspécialisation croissante au sein de chacune des disciplines scientifiques d'où une nécessaire pluridisciplinarité car « *chaque domaine de la Science doit non seulement utiliser des chapitres différents des mathématiques mais surtout il doit les aborder dans une optique particulière* ». Il y joignait quelques remarques sur le bon usage de la Statistique en médecine, celle-ci étant aussi appelée à faire usage d'autres branches des mathématiques dont la logique floue de L. Zadeh qu'il cite explicitement.

Il convient au passage de noter que Joseph Kampé de Fériet, gendre du professeur Carlier, chirurgien de la Faculté de Lille, a connu de nombreux amis dans le milieu médical lillois et a eu de fructueux échanges mathématiques avec plusieurs d'entre eux.

Dans le cours de son allocution aux congressistes il notait aussi : « Reine ou servante ? Tels sont les deux aspects sous lesquels peuvent apparaître les mathématiques.

« En effet, pour certains, les mathématiques trouvent leurs fins en elles-mêmes, dans le développement sans cesse plus abstrait de leurs propres structures ; pour d'autres au contraire ... elles sont utilisées comme un outil indispensable au progrès de leurs recherches. »

Ce thème, il l'avait déjà développé le 24 mai 1948 lors du discours *Grandeur et servitude des mathématiques* [101] qu'il prononça à la demande du Recteur Souriau, lors de la séance solennelle de l'Université de Lille lorsqu'il énonçait :

« L'activité mathématique, tour à tour Reine et Servante, a donc un double aspect :

– l'un où la pensée, affranchie de toute contrainte extérieure se développe librement, mue par le seul besoin de connaître, guidée par une sorte d'instinct esthétique profond.

– l'autre où les acquisitions de cette pensée jouent le rôle subordonné d'outils utilisés pour les fins des Sciences appliquées ou des Techniques industrielles. »

Après avoir noté que le progrès des connaissances en mathématiques peut tout aussi bien procéder de problèmes posés par la Physique ou l'Industrie, il notait aussi que « les pages les plus belles, les plus neuves et les plus riches des Mathématiques modernes ... furent écrites loin de toute préoccupation venue du dehors. »

A l'aide d'exemples, il signalait que des théories auxquelles de grandes écoles mathématiques ont consacré de grands efforts et qui sont parvenues à une belle maturité n'ont pas d'application « mais qu'en revanche la réciproque est encore plus vraie : innombrables sont les questions posées du dehors auxquelles les Mathématiques ne savent pas répondre, » il citait en particulier le cas de la Mécanique des Fluides.

Il terminait en notant que « Les vrais, les grands progrès des Mathématiques se font par création de concepts nouveaux, par élargissement des horizons » et citait à l'appui de ce dire la création de la géométrie analytique par Fermat et Descartes au XVII^e.

Ces propos, il les reprendra de manière encore plus générale dans la conférence *Grandeur et servitude de la science* [212] qu'il prononcera le 16 janvier 1972 lorsque la Société Industrielle du Nord de la France dans sa séance solennelle lui remettra sa plus haute distinction, la grande médaille d'or de la Fondation Kuhlmann.

Ce thème de l'évolution actuelle de la science, il l'avait déjà évoqué les 9 janvier 1955 et 8 janvier 1956 dans les deux conférences qu'il donna en tant que Président de la Société des Sciences, des Arts et de l'Agriculture de Lille :

Sous le signe de l'accélération [134] et
La technique frappe à notre porte [140]

Après avoir noté l'accélération incessante et concomittante des progrès de la Technique et de la Science, et, par voie de conséquence, l'accroissement du volume et du nombre des publications scientifiques, il en déduisait l'ultraspécialisation croissante des scientifiques et posait la question :

« Comment assurer le lien entre les ultraspécialistes ? »

Ce rôle d'interface, il l'a en fait très vite joué et ce fut son souci constant comme on l'a déjà signalé à propos de ses travaux sur la théorie de la Turbulence qui joue un rôle unificateur pour la plupart de ses recherches.

Cette dualité d'intérêt qu'il manifesta entre les mathématiques d'une part, la mécanique des fluides de l'autre lui vaudra parfois une certaine incompréhension d'une partie des spécialistes de ces disciplines lesquels avaient toujours tendance à le classer comme étant de la discipline autre que la leur ! Au soir de sa vie, il aura souvent l'impression d'avoir été mieux compris à l'étranger qu'en France.

Il convient ici de rappeler qu'il a toujours évolué dans un milieu international où sa renommée était grande.

Il soulignait toujours le plaisir qu'il éprouvait lors d'une visite aux USA de pouvoir rencontrer l'un ou l'autre de ses amis mathématiciens : Norbert Wiener, Garrett Birkhoff, Georges Mackey, David Vernon Widder ... afin d'évoquer un problème mathématique connexe à l'une de ses recherches et d'obtenir immédiatement d'eux le conseil qui lui permettait de progresser.

Fréquemment, l'excellent photographe qu'il était profitait de la plupart de ses voyages pour accumuler les diapositives prises sur les sites qu'il visitait.

De retour à Lille, il faisait profiter ses proches, ses amis et les auditoires les plus divers de conférences sur les lieux visités qu'il illustrait par les diapositives qu'il avait prises sur le site des temples aztèques ou mayas ou des temples hindous dans le sud de l'Inde où il s'aventurait dans la jungle à près de 80 ans en la compagnie de son seul guide.

Pour illustrer la grande diversité de ses centres d'intérêt, il convient aussi de citer la recherche historique qu'il effectua sur

« Le séjour à Lille de la famille Mozart en 1765 »

A partir d'une lettre de Léopold Mozart datée de La Haye, 19 septembre 1765, de deux lignes de notes de Marianne Mozart et du carnet de notes de voyage de Léopold Mozart, il reconstitua le séjour à Lille de la famille, prolongé du fait des maladies du 5 août au 4 septembre. Il le situa dans l'ensemble du grand voyage qu'elle effectua de 1763 à 1766. A l'aide de documents d'histoire locale, il reconstitua leurs lieux de séjour, leurs rencontres avec des musiciens et les monuments visités.

Il exposa le fruit de ce travail à ses collègues de la Société des Sciences le 8 mars 1957, sa conférence étant reproduite par les soins de la société.

Il fut toujours à l'affut de toutes les nouveautés, Monsieur Gérard Gontier le caractérisait bien en novembre 1971 en notant

« Partout où il va, il s'enthousiasme pour toutes les idées nouvelles et les réalisations qu'on peut en tirer, témoin cette admiration qu'il montre pour une pompe d'un type original mettant en oeuvre une loi de comportement non linéaire donnée par l'américain R.S. Rivlin pour une classe de fluides visqueux. »

Pour conclure, il nous reste à évoquer l'homme très chaleureux, fidèle à ses amitiés et le chrétien animé d'une foi très profonde qui lui permit de surmonter les épreuves successives qu'il eut à affronter dont le décès prématuré de son épouse à 41 ans en 1934 et la maladie qui le tint alité de juillet 1981 au 6 avril 1982, date de son décès.

ANNEXE

Témoignages officiels de satisfaction donnés à Joseph Kampé de Fériet pour son activité de la Commission de Gâvres de 1916 à 1919.

Témoignage officiel de satisfaction décerné le 4 novembre 1917 par Charles Chaumet, Ministre de la Marine.

Monsieur Kampé de Fériet, docteur ès sciences, soldat auxiliaire, mathématicien très distingué, utilisé comme calculateur et rédacteur de procès verbaux de tir à la Commission de Gâvres, s'acquitte d'une façon parfaite de ses fonctions.

Esprit chercheur qui a traité un intéressant problème de Balistique sur le calcul des cœfficients différentiels.

Témoignage officiel de satisfaction accordé le 30 avril 1919 par Georges Leygues, Ministre de la Marine.

Monsieur Kampé de Fériet, docteur ès sciences, a déployé son activité à Gâvres dans les branches les plus diverses.

Après avoir abordé avec succès certaines questions théoriques de Balistique extérieure, en particulier relativement au mouvement du projectile autour de son centre de gravité, a imaginé en collaboration avec un de ses collègues, un appareil nouveau actuellement en essai, basé sur l'enregistrement photographique de la trace du projectile, appelé à rendre les plus grands services pour la mesure des vitesses sous tous les angles, appareil dont la réalisation paraît aisée et la mise au point facile.

Les services rendus à la Commission de Gâvres par Monsieur Kampé de Fériet ont déjà été reconnus par un premier témoignage officiel de satisfaction que le Ministre a bien voulu lui accorder le 4 novembre 1917.

Hommage des Mécaniciens au Professeur Marie-Joseph Kampé de Fériet

Le Professeur Marie-Joseph Kampé de Fériet nous a quittés le mardi 6 avril 1982 après une hospitalisation de sept mois à Villeneuve d'Ascq près de Lille. Son départ a été ressenti avec une vive émotion par tous ceux qui avaient pu l'approcher et apprécier ses qualités de savant, de pédagogue, d'homme de lettres.

Sa culture était immense, témoignant d'un rare humanisme. Il a donné l'exemple d'un personnage qui a pu réaliser la synthèse de nombreuses disciplines. Ses connaissances universelles, loin de l'isoler au sein d'un petit noyau d'initiés, lui permettaient de mieux saisir les problèmes de la vie et de prendre part aux soucis quotidiens de son entourage : il plaisait à tous par sa simplicité, sa bienveillance et son cœur généreux.

Il fut reconnu universellement comme étant un enseignant de qualité exceptionnelle : ses étudiants à Lille, en France et dans le monde entier ont été conquis par la clarté de ses exposés et par la finesse de son jugement. Il était constamment soucieux de l'aspect concret des idées et il s'efforçait de communiquer cet état d'esprit à ses élèves : à une époque où la science s'engage sur des voies de plus en plus abstraites, son œuvre apparaît comme étant une mise au point de la plus haute importance.

Il s'intéressait de très près à l'évolution des sociétés et des civilisations, tant occidentales qu'extrême-orientales, hindouistes ou précolombiennes. Il participa activement à la réconciliation franco-allemande après la seconde guerre mondiale. Passionné de musique et d'histoire locale, il fit des recherches sur le séjour de Wolfgang Amadeus Mozart à Lille en 1766. Il aimait s'adresser au grand public ; il traitait avec aisance de sujets les plus divers ; il charmait son auditoire par ses dons innés de conteur.

On a dit qu'il était l'homme de la curiosité, de la communication et de l'ouverture ; il serait juste d'ajouter qu'il était aussi un créateur et un organisateur : il fonda à Lille un Institut de Mécanique des Fluides d'une réputation mondiale ; il sut s'entourer de collaborateurs compétents et obtenir la confiance des industriels de la région. Au mépris des plus graves dangers, il organisa le repli de son personnel vers Toulouse lors de l'invasion allemande en 1940. Par son esprit critique éveillé, il s'était acquis la réputation d'un conseiller avisé que l'on aimait consulter avant toute décision importante : par la sûreté de son intuition et de son jugement, il inspirait la confiance et il stimulait chacun à l'action.

Né à Paris le 14 mai 1893, Marie-Joseph Kampé de Fériet y suit les cours de la Sorbonne de novembre 1910 à juin 1913, date à laquelle il obtient la licence ès-sciences. Dès cette époque il manifeste son intérêt pour la mécanique en acceptant d'effectuer un stage en astronomie à l'Observatoire de Paris. Mobilisé dans l'infanterie le 11 août 1914, il sollicite de l'Armée un congé de convalescence durant lequel il soutient, le 24 avril 1915, la thèse de doctorat qu'il avait préparée sous la direction du professeur Paul Appell. C'est un événement militaire qui devait permettre à Monsieur Kampé de Fériet de prendre un premier contact avec la mécanique des fluides : il reçoit en effet son affectation à la Commission d'Expériences de l'Artillerie Navale à Gâvres où il est chargé, en 1916, des études de balistique et, pour étudier les perturbations des projectiles sur leurs trajectoires, il lui faut tenir compte de l'influence du milieu ambiant. Démobilisé le 20 septembre 1919, Monsieur Kampé de Fériet est nommé Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de l'Université de Lille le 1er novembre 1919, chargé du cours de la Fondation Claude-Antoine Peccot au Collège de France pour l'année 1927–1928 et promu au grade de Professeur Titulaire de Mécanique le 1er janvier 1930. C'est pendant cette période qu'il assure en 1925–1926 un cours à l'Université des Rois Jagellons à Cracovie et des leçons à l'Ecole Polytechnique de Varsovie et à l'Université de Prague. L'accident d'avion où périt en 1928 le Sous-Secrétaire d'Etat Bokanowsky suscita la création du Ministère de l'Air et il fut décidé de fonder en France quatre Instituts de Mécanique des Fluides : la direction de celui que l'on prévoyait à Lille fut confiée au Professeur Kampé de Fériet le 1er novembre 1929. La pose de la première pierre eut lieu le 23 juin 1932 et l'inauguration officielle en avril 1934 au cours d'un congrès organisé par les Ingénieurs Civils de France. Les recherches entreprises à Lille, notamment en turbulence et sur la couche limite, sont poursuivies activement à Toulouse pendant l'occupation allemande. C'est au retour à Lille, en 1945, que le Professeur Kampé de Fériet quitte la direction de l'Institut de Mécanique des Fluides pour se consacrer désormais plus complètement à son enseignement et à ses recherches théoriques. La retraite, qu'il prend en 1964, ne diminue en rien ses activités intellectuelles : il oriente alors peu à peu ses recherches vers une généralisation de la mécanique statistique aux milieux continus, son objectif étant d'aboutir à une axiomatisation en vue d'une théorie générale des systèmes évolutifs.

On ne saurait décrire en quelques lignes l'œuvre scientifique et pédagogique du Professeur Kampé de Fériet ; on ne peut ici qu'en souligner quelques uns des aspects les plus remarquables. Les installations mises en place à l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille, notamment la grande soufflerie horizontale et la soufflerie de vrille, se sont révélées comme étant des moyens efficaces pour améliorer les qualités de vol des avions et assurer la sécurité des passagers. Par les rapports étroits qu'il sut établir avec des industries locales telles que les établissements Neu à Lille en ventilation et la Société de Constructions Aéronautiques Henry Potez à Meaulte, le Professeur Kampé de Fériet fut un précurseur de la collaboration qui devait par la suite se développer avec succès entre l'Université et le secteur économique. En météorologie, il utilisa systématiquement les nuages comme moyen de visualisation pour étudier les mouvements de l'atmosphère dans le massif alpin. Ses recherches à caractère théorique se sont exercées dans des domaines aussi divers que celui des mathématiques pures et appliquées, ceux de l'aérodynamique et de l'hydrodynamique et celui de la mécanique des milieux continus : on y dénombre plus de 220 publications dûment répertoriées, parmi lesquelles le célèbre traité sur les fonctions hypergéométriques et les polynômes d'Hermite, un important ouvrage sur le calcul vectoriel et ses applications, ainsi qu'une excellente introduction à l'algèbre et à l'analyse tensorielle, notions qui en 1924 étaient totalement absentes des programmes universitaires français. Il dispensa un enseignement de haut niveau dans plus de cinquante écoles et universités étrangères, en Europe, en Asie et en Amérique. Il était Membre Correspondant de l'Académie des Sciences, Membre du Conseil National de la Recherche Scientifique, Membre de la Royal Aeronautical Society et Membre d'un grand nombre d'associations scientifiques françaises et étrangères. Il était Docteur Honoris Causa des Universités de Gand et de Bologne, Officier d'Académie, Officier de la Légion d'Honneur, Commandeur dans l'Ordre National du Mérite et titulaire de la Médaille d'Honneur de l'Aéronautique.

Dans la personnalité du Professeur Marie-Joseph Kampé de Fériet, une des qualités, qui n'est pas la moindre parmi tant d'autres, est celle de la fidélité. En acceptant le poste qu'on lui offrait à Lille, il s'engagea dans une voie dont il ne devait dès lors jamais plus s'écarter : toute sa carrière se déroula dans l'Académie de la Région Nord – Pas-de-Calais. Une telle fidélité a beaucoup touché les milieux lillois et ceux-ci, à leur tour, sont restés profondément attachés à leur Maître.

Lille, le 23 Août 1982

G. Gontier

Allocution prononcée par Michel PARREAU aux obsèques de Joseph KAMPÉ DE FÉRIET (14 mai 1893 – 6 avril 1982)

L'homme auquel nous rendons aujourd'hui hommage laisse derrière lui une œuvre considérable. Sa longue vie a été consacrée pour l'essentiel à la Science ; ses premiers travaux datent de novembre 1913, ses derniers de quelques mois à peine. La richesse et la diversité de cette œuvre permettent difficilement de la résumer en quelques mots ; je vais essayer de le faire, mais auparavant je rappellerai les traits saillants de sa carrière universitaire, qui elle, au contraire, a été simple et unie, puisqu'elle s'est déroulée tout entière à Lille, à l'exception d'une parenthèse de 1940 à 1944 en raison de la guerre.

Joseph Kampé de Fériet est né à Paris le 14 mai 1893, il y a fait toutes ses études et y a préparé son doctorat sous la direction de Paul Appell. Après avoir passé cinq ans sous les drapeaux de 1914 à 1919, et avoir soutenu sa thèse au cours d'une permission de convalescence en avril 1915, il a été nommé Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lille en 1919 ; professeur sans chaire en 1925, il était en 1929 le fondateur et le premier directeur de l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille ; l'année suivante il était nommé professeur en Mécanique des Fluides à la Faculté, poste qu'il a occupé jusqu'à sa retraite en 1964. Il avait alors accompli plus de 50 ans de services civils et militaires.

Depuis dix ans, il était correspondant de l'Académie des Sciences. Il avait été nommé Docteur Honoris Causa des Universités de Gand et de Bologne, et appartenait à des nombreuses sociétés savantes, qu'il m'est impossible d'énumérer ici. De nombreuses distinctions l'avaient honoré ; il était en particulier Officier de la Légion d'Honneur et Commandeur de l'Ordre National du Mérite.

Mais là n'est pas l'essentiel, car cette carrière très rectiligne exprime fort mal la variété et l'importance des travaux de Joseph Kampé de Fériet. Jeune parisien, il avait suivi l'enseignement des grands maîtres de la Sorbonne, Poincaré, Picard, Goursat, Paul Appell ; ce dernier, devenu professeur de Mécanique Céleste après la mort prématurée de Poincaré, devait avoir sur Joseph Kampé de Fériet une influence décisive ; devenu son directeur de thèse, il l'a orienté vers l'étude des fonctions spéciales en même temps que vers celle de la Mécanique ; tandis qu'il rédigeait sa thèse, Joseph Kampé de Fériet entrait comme astronome adjoint à l'Observatoire, mais il y restait un an à peine, car la déclaration de guerre, intervenant juste après le dépôt de sa thèse, l'écartait temporairement de la recherche mathématique. Ce n'était d'ailleurs que pour peu de temps ; affecté en 1916 à la Commission de l'Artillerie Navale de Gâvres, Joseph Kampé de Fériet y faisait d'importants travaux de balistique (mesure de la vitesse des projectiles par enregistrement photographique) et d'hydrodynamique.

Ainsi s'affirmait déjà l'unité de son œuvre et sa diversité ; si les fonctions spéciales intéressent les Analystes, il ne faut pas oublier qu'elles ont trouvé leur origine dans la Physique mathématique et la Mécanique ; il n'y a donc aucune solution de continuité chez Joseph Kampé de Fériet entre les préoccupations de l'Analyste et celles du Mécanicien.

De 1920 à 1929, en même temps qu'il fait à Lille des enseignements de Mathématiques Générales, de Mécanique Rationnelle, d'Analyse Supérieure, dans lesquels il met l'accent sur les applications pratiques des mathématiques, Joseph Kampé de Fériet poursuit ses travaux sur les fonctions hypersphériques et hypergéométriques sur lesquelles il publie en 1926, en collaboration avec Paul Appell, un traité qui fait encore autorité. Ses recherches portent plus particulièrement sur les fonctions hypergéométriques de deux variables et des équations aux dérivées partielles dont elles sont solutions. Il n'abandonne pas pour autant ses travaux de balistique et d'hydrodynamique, qui font l'objet de diverses publications.

C'est pourquoi, au moment où le développement de l'aviation amenait la création d'un Ministère de l'Air et de quatre Instituts de Mécanique des Fluides, Joseph Kampé de Fériet a été appelé naturellement à fonder et à diriger celui de Lille. Avec l'aide d'André Martinot-Lagarde, il a donné à cet Institut, en quelques années, un essor extraordinaire ; pratiquant avant la lettre cette ouverture vers l'extérieur qu'on essaye si difficilement de promouvoir de nos jours, il s'attache la collaboration de l'avionneur Henry Potez et de l'industriel lillois Henri Neu. Spécialisé dans l'étude de la turbulence atmosphérique et de ses effets, Joseph Kampé de Fériet n'hésite pas à expérimenter sur le terrain ; conseiller technique de l'équipe de France de vol à voile, il explore les massifs de l'Oberland bernois, survole la Jungfrau et le Cervin, et en ramène des mesures en excellent accord avec la théorie. Je citerai également ses missions au Sahara et sa création, avec MM. Martinot-Lagarde et Rollin, d'un appareil destiné à mesurer les variations de vitesse en grandeur et en direction, l'anémoclinomètre (1938).

Tout cela pourrait nous faire croire que Joseph Kampé de Fériet était devenu exclusivement un mathématicien appliqué. Ce serait une vue totalement erronée.

Revenant en arrière, je dois mentionner ses missions en Pologne, où il a professé pendant un semestre à Cracovie, et où il s'est lié avec la très brillante école mathématique polonaise de l'entre deux guerres, groupée autour de la revue *Fundamenta Mathematicae*, et dont les représentants les plus connus sont Banach et Steinhaus ; il s'est ainsi intéressé à l'Analyse Fonctionnelle bien avant qu'elle ne devienne populaire en France.

D'autre part, ses études sur la turbulence l'avaient amené à reprendre le point de vue de Boussinesq et Reynolds qui estimaient que les phénomènes de turbulence étaient aléatoires, et qu'on n'en pouvait mesurer que des valeurs moyennes ; Reynolds avait établi les équations vérifiées par ces moyennes. Dès avant la guerre, Joseph Kampé de Fériet avait décrit, sous le nom de transformation de Reynolds, la correspondance entre les fonctions liées à un fluide turbulent et les moyennes mesurées.

Ce fut le point de départ de ce qu'on pourrait appeler la troisième période de son activité scientifique, celle qui a été consacrée au Calcul des Probabilités et aux Fonctions Aléatoires. Dès son retour de Toulouse, où l'I.M.F.L. avait été replié de 1940 à 1944, Joseph Kampé de Fériet se décharge de ses responsabilités administratives, et se consacre exclusivement à ses enseignements et à ses recherches.

En particulier, il donne un remarquable exposé de sa théorie statistique de la turbulence dans le grand traité de A. Blanc-Lapierre et R. Fortet sur les fonctions aléatoires.

Ses travaux sur les intégrales aléatoires de la physique mathématique le conduisent à étendre aux milieux continus la mécanique statistique de Gibbs, et aboutissent à une théorie générale des systèmes évolutifs aléatoires, édifiée en collaboration avec des chercheurs du Centre de Recherches Physiques du C.N.R.S. de Marseille.

En outre, il s'intéresse aux aspects les plus divers du Calcul des Probabilités, et apporte dans de nombreuses communications des contributions remarquées à la théorie des fonctions aléatoires.

Pendant cette période, il se rend fréquemment aux Etats-Unis pour travailler avec le mathématicien américain Garrett Birkhoff, qui avait étudié analytiquement la structure des opérateurs satisfaisant aux axiomes des transformations de Reynolds.

Lors de ses séjours en Amérique, Joseph Kampé de Fériet a de fructueux contacts scientifiques ; dès 1946, il s'initie à la cybernétique et à la théorie de l'information de Norbert Wiener et Claude Shannon. Depuis une vingtaine d'année, c'est ce domaine de recherches qui a le plus retenu son attention. En collaboration avec des probabilistes lillois, et aussi avec des mathématiciens italiens et américains, il développe et généralise la théorie de l'information de Wiener-Shannon, qui fait notamment l'objet de ses derniers cours. Sa mise à la retraite, bien loin de limiter ses activités, accroît encore sa fécondité, en le libérant de ses obligations universitaires ; récemment encore, il préparait une étude de la notion de probabilité subjective.

En même temps qu'un grand chercheur, Joseph Kampé de Fériet a été toute sa vie un propagandiste infatigable de ses idées scientifiques ; ses talents de conférencier étaient très appréciés, et il a été appelé à accomplir de nombreuses missions à l'étranger, principalement aux Etats-Unis, mais aussi en Pologne, en Italie, en Belgique, en Scandinavie, en Inde, au Japon.

Tel est le résumé, très incomplet et partant peu fidèle, d'une activité d'universitaire et de chercheur qui a duré pendant près de soixante dix ans. La sécheresse et le caractère technique de mes propos ont bien mal traduit l'enthousiasme, l'élan créateur, la générosité que Joseph Kampé de Fériet a mis dans son travail scientifique, comme dans toute son existence ; comme jeune collègue, puis comme doyen et président, j'ai pu apprécier la chaleur de son accueil, son extrême courtoisie, l'affabilité dont il a toujours fait preuve à l'égard de ses cadets, son ouverture d'esprit, le charme de sa conversation. Il n'avait rien du savant confiné dans sa spécialité ; suivant la formule consacrée, rien de ce qui était humain ne lui était étranger. Passionné d'art, de musique, d'étude des civilisations, il s'est intéressé aux manifestations les plus variées de la culture, et sa curiosité intellectuelle, son goût de la nouveauté (qui n'excluait pas l'esprit critique) sont restés intacts jusqu'à la fin de sa vie.

La grande attention qu'il a toujours accordée aux hommes lui avait valu de solides amitiés, et c'est sans doute pour cela qu'il n'avait pas voulu quitter Lille, où il a finalement passé plus de soixante ans. Malgré son grand âge, nous le revoyions souvent à l'Université, où il assistait à des séminaires et à des conférences. Nous en ressentons d'autant plus cruellement sa perte, et je voudrais dire à sa famille combien nous nous associons à son deuil. Joseph Kampé de Fériet a été pour nous un prestigieux aîné, qui nous a donné un magnifique exemple, et nous garderons de lui le souvenir d'un grand savant et d'un parfait honnête homme, dont la présence à Lille pendant plus d'un demi-siècle a vivifié et honoré notre communauté scientifique.

Au-delà de la peine que nous cause sa disparition, notre gratitude envers lui ne se démentira pas, son nom et son œuvre resteront à jamais vivants dans nos cœurs, comme dans l'histoire de la science.

Michel Parreau

Président honoraire de l'Université
des Sciences et Techniques de Lille I

Notices sur les membres et les correspondants décédés

sur Joseph Kampé de Fériet (1893–1982), *Correspondant pour la Section des Sciences Mécaniques*, par Lucien Malavard

Nous avons appris avec une grande tristesse le décès, le 6 avril 1982, après une longue hospitalisation à Villeneuve d'Ascq près de Lille, de Joseph Kampé de Fériet. Il avait été élu Correspondant de notre Académie en 1954 dans la Section de Mécanique.

Il était né le 14 mai 1893 à Paris. Après avoir suivi les cours de la Sorbonne entre 1910 et 1913, il obtient sa licence ; remarqué par Paul Appell, alors professeur de mécanique céleste, il est orienté vers l'étude des fonctions spéciales et aussi vers la mécanique ; dans le même temps il accomplit un stage à l'Observatoire de Paris où il travaille sur la transmission radioélectrique de l'heure.

Survient la déclaration de guerre ; il est mobilisé dans l'infanterie en août 1914, mais un congé de convalescence en 1915 lui permet de soutenir sa thèse de doctorat, dont il n'avait cessé de préparer la rédaction. Son important mémoire avait pour titre *Sur les fonctions hypersphériques*, il traite de la théorie du potentiel dans les espaces à n dimensions ; ce devait être le point de départ d'une œuvre qui, à elle seule, suffirait à justifier la réputation de son auteur. En 1916 il est affecté à la Commission de l'Artillerie Navale de Gâvres ; c'est pour lui l'occasion d'entreprendre diverses études sur le mouvement des projectiles, les perturbations des trajectoires, la mesure des vitesses et, ainsi, de s'initier à divers problèmes de mécanique des fluides et plus spécialement d'aérodynamique.

À la démobilisation il est nommé maître de conférences à la Faculté des Sciences de Lille, où, Professeur dès 1927, il devait accomplir toute sa carrière ; il assure des enseignements de mathématiques générales, de mécanique rationnelle, d'analyse supérieure, dans lesquels il met l'accent sur les applications pratiques des mathématiques. Il publie en 1924, avec Albert Chatelet, un important ouvrage d'enseignement sur le calcul vectoriel. Simultanément il poursuit des travaux sur les fonctions hypersphériques et hypergéométriques et publie sur le sujet en 1926, en collaboration avec Paul Appell, un traité qui fait encore autorité. Dans la même période des séjours à Prague, Varsovie, Cracovie lui avaient donné l'occasion de nouer de fructueuses relations avec la brillante école mathématique polonaise de Banach et Steinhaus.

En 1929, le développement de l'aviation et le besoin de promouvoir la recherche en aéronautique amènent la création d'un ministère de l'Air et de quatre instituts de mécanique des fluides dans les universités ; la mission de fonder et diriger celui de Lille est aussitôt confiée à Kampé de Fériet. Sous son impulsion cet institut eut, en quelques années, un essor considérable. Rassemblant une brillante équipe d'universitaires, d'ingénieurs, de techniciens, s'assurant la collaboration d'industriels implantés dans la région (initiative rare à l'époque de la part d'un universitaire), Kampé de Fériet assure la mise en place rapide d'importantes installations : une soufflerie horizontale de plus de 2 m de diamètre, une originale soufflerie verticale à courant ascendant pour l'analyse de la vrille des avions, un bassin hydrodynamique de 22 m de long pour l'étude de la houle, des phénomènes d'affouillement des sols, etc.

Bien que théoricien de formation Kampé de Fériet s'est toujours intéressé de très près aux études expérimentales entreprises avec ces installations et, bien souvent, c'est grâce à ses conseils, ses interventions, sa perspicacité que des résultats marquants ont été obtenus tels que : les premières explorations de la couche limite sur une plaque plane et sur une sphère pour caractériser la turbulence fine de l'air en mouvement, le nombre de Reynolds critique de la sphère à sa valeur 365 000, l'analyse de la couche limite sur aile d'avion pour la détermination de la transition laminaire–turbulent et la résistance de profil, la conception d'un anémoclinomètre pour la mesure de la vitesse du vent en grandeur et direction dans des rafales de courtes durée, instrument adopté ensuite par la Météorologie Nationale et l'Amirauté britannique.

Son intérêt pour les études de la turbulence et de ses effets l'amène à être membre de la commission de la turbulence atmosphérique en 1935. A ce titre il participe aux campagnes de vol à voile au centre aérologique de la Banne d'Ordanche. Il a l'idée d'utiliser systématiquement les nuages comme moyen de visualisation des mouvements de l'atmosphère, il explore ainsi les massifs de Haute-Savoie ceux de l'Oberland Bernois et le Cervin, dont la forme pyramidale lui permet d'établir, par observations cinématographiques, une remarquable confrontation avec des résultats d'essais sur maquettes en soufflerie. Au cours d'une mission au Sahara, il étudie encore, en coopération avec les britanniques, des mouvements atmosphériques à basse altitude et les conditions de leur stabilité.

Au moment de l'invasion allemande, Kampé de Fériet a dû assurer en mai 1940 le repli de son laboratoire à l'Institut de Mécanique des Fluides à Toulouse, repli qu'il assuma avec une parfaite maîtrise puisque les travaux purent reprendre presque aussitôt avec la construction d'une soufflerie inclinable pour l'étude du vol libre, l'élaboration d'une soufflerie à très faible turbulence, l'aménagement d'un planeur laboratoire, de nouvelles études sur la couche–limite et le spectre de la turbulence.

Dès son retour de Toulouse, Kampé de Fériet décide de se décharger de la direction de l'Institut de Mécanique des Fluides pour se consacrer exclusivement à son enseignement et à ses recherches théoriques. Ce fut le début d'une nouvelle et intense activité scientifique sur le calcul des probabilités et les fonctions aléatoires. Ses études sur la turbulence l'avaient, en effet, amené à reprendre le point de vue de Boussinesq et de Reynolds : la turbulence étant un phénomène aléatoire, son observation ne peut fournir que des moyennes ; dès avant la guerre Kampé de Fériet avait décrit sour le nom de transformation de Reynolds, la correspondance entre les fonctions liées à un fluide turbulent et les moyennes mesurées. Il a ainsi été conduit à étudier les solutions aléatoires des équations différentielles et aux dérivées partielles et il s'était proposé d'élaborer une mécanique statistique des milieux continus : ce fut pour lui l'occasion d'établir une étroite et amicale collaboration avec Garret Birkhoff, de l'Université Harvard.

Parallèlement il fut amené à construire des mesures de probabilités sur certains espaces fonctionnels usuels.

Dans ses travaux de mécanique statistique à propos du maximum d'entropie, il s'était intéressé de très près à la théorie de l'information de Wiener et Shannon ; il lui avait consacré de nombreuses publications avec ses élèves et la collaboration de spécialistes italiens, et en avait fait l'objet de ses derniers cours. Sa retraite en 1964 ne fut pas une entrave à son activité, car peu de temps après il eut l'idée d'élaborer une nouvelle théorie de l'information remettant en question sa base probabiliste et il a proposé ainsi une version de caractère plus général fondée sur la notion de loi de composition. Ses travaux ultérieurs devaient l'amener à se pencher sur les fondements mêmes de la théorie des probabilités et, récemment encore, il s'était fixé pour objectif d'analyser le concept de probabilité subjective.

Auteur de 238 publications, dont la dernière est à la livraison, ce savant dont la réputation internationale s'est élargie au cours des ans, était aussi un humaniste de grande culture, passionné d'art, de musique et d'histoire des civilisations. Simple, bienveillant, généreux, il séduisait par son affabilité, sa finesse et son ouverture d'esprit, la sûreté de son jugement, son enthousiasme lucide face à la nouveauté. Conteur fascinant, prestigieux pédagogue, la clarté et le brillant de ses exposés marquaient ses auditeurs : dans le monde de l'aviation, et malgré les décennies passées, on garde encore le souvenir de la conférence qu'il avait donnée sur « un problème clé de l'aéronautique : la couche limite ».

Notre Compagnie présente à sa famille ses très vives condoléances et l'assure qu'Elle s'honore de l'avoir compté en son sein.

C.R. Acad. Sc. Paris, t. 296
Vie Académique, 33–35, janvier 1983

J. Kampé de Fériet
Correspondant de l'Institut
Professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Lille

Curriculum vitæ
établi pour la Direction Générale des Affaires Culturelles
du Ministère des Affaires Etrangères

Lille, 1er janvier 1966

I
- Né le 14 mai 1893 à Paris XVIe.
- De nationalité française.
- Veuf, père de 3 enfants majeurs.

II
- Études Supérieures à la Sorbonne, de 1910 à 1914.
- Thèse sous la direction de Paul Appell déposée le 1er juillet 1914, soutenance le 25 avril 1915 pendant un congé de convalescence de l'Armée (mobilisé du 11 août 1914 au 20 septembre 1919).
- Astronome stagiaire à l'Observatoire de Paris, le 1er janvier 1914.
- Nommé Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de l'Université de Lille, le 1er novembre 1919.
- Professeur sans Chaire, mars 1927.
- Chargé du cours de la fondation Claude-Antoine Peccot au Collège de France, pour l'année 1927–1928.
- **Fondateur et Directeur de l'Institut de Mécanique des Fluides de l'Université de Lille,** le 1er novembre 1929.
- **Professeur Titulaire de Mécanique des Fluides à la Faculté des Sciences de l'Université de Lille,** le 1er janvier 1930.
- Directeur honoraire de l'Institut de Mécanique des Fluides, 1er juillet 1945.
- Mis à la retraite le 1er octobre 1964.
- Professeur Honoraire à la Faculté des Sciences de l'Université de Lille, le 30 mars 1965.

III – **Membre du Conseil National de la Recherche Scientifique 1950–1963.**

– Membre de la Commission d'Expériences de l'Artillerie Navale Gàvre, 1920 – 1944.

– Membre du Comité des Travaux Historiques et Scientifiques du Ministère de l'Education Nationale, 1925 – ...

– Membre de Internationale Studienkommission für Motor – Losenflug I.S.T.U.S. 1935–1939.

– Membre du Conseil de Perfectionnement de l'I.C.A.M. – Lille, 1955 – ...

– Membre du Conseil de Perfectionnement de l'Ecole des Hautes Etudes Industrielles, Lille, 1964 – ...

IV – Officier d'Académie, Officier de l'Instruction Publique.

– Chevalier de la Légion d'Honneur, avril 1934.

– **Officier de la Légion d'Honneur**, mai 1954.

– Médaille d'Honneur de l'Aéronautique, mai 1954.

V – Membre de la Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts, Lille, élu en 1937 (Président en 1954–1955).

– Membre correspondant de la Real Academia de Ciencias, Madrid, élu en 1949.

– **Membre correspondant de l'Académie des Sciences** (Section de Mécanique) élu le 14 juin 1954.

– Membre correspondant de l'Academia di Modena, élu en 1957.

– Membre correspondant de l'Académie Polonaise des Sciences, Varsovie, élu en 1930 (de 1930 à 1939).

– Membre de Lilienthalgesellschaft, Berlin, élu en 1936 (de 1936 à 1939).

– Docteur Honoris Causa de l'Université de Gand, 1957.

– Docteur Honoris Causa de l'Universita di Bologna, 1961.

VI – Membre de la :

a) Société Mathématique de France, Paris.

– Société Hydrotechnique de France (Membre du Comité Technique), Paris.

- Société Météorologique de France, Paris.
- Association Française pour l'Avancement des Sciences, Paris.
- Association technique maritime et aéronautique, Paris.
- Société des Ingénieurs Civils de France (Section de Lille).
- Association Universitaire de Mécanique des Fluides, Paris, (Président d'Honneur 1964).
- Association Française pour le Contrôle de la Qualité (Président de la Section Lilloise).
- Société Scientifique de Bruxelles (Président en 1949 – 1950).
- Royal Aeronautical Society, Londres.
- American Mathematical Society – Providence R.I.
- Institute of the Aerospace Sciences, New-York.
- Institute of Mathematical Statistics, East Lansing (Mich).
- Washington Academy of Sciences, Washington D.C.
- Philosophical Society, Washington D.C.

b) Alliance Française (Président du Comité de Lille, 1946–1953).

- Rotary Club (Président du Club de Lille, 1949–1950).

c) Jusqu'en 1939 :

- Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik, Berlin.
- Circolo Matematico di Palermo.
- Société Polonaise de Mathématiques, Varsovie.
- Société Tchèque de Mathématiques, Prague.

VII – Missions de la Direction des Affaires Culturelles

a) Indian Institute of Technology, Kharagpur, Inde, 1er novembre 1960 – 1er mars 1961.

b) Indian Institute of Sciences, Bangalore, Inde, 1er novembre 1962 – 1er février 1963.

VIII – Enseignements à l'étranger :

a) ***Enseignement annuel :***

- Catholic University of America, Washington, D.C., année scolaire 1964–1965, échange Fulbright.

b) ***Enseignement semestriel :***

- Université des Rois Jagellons-Cracovie. Semestre d'hiver, 1925–1926.
- Maryland University, College Park, Maryland, échange Fulbright, semestre d'hiver 1950–1951.
- Maryland University, College Park, Maryland, semestre d'hiver 1951–1952.

c) ***Séries de 5 à 10 leçons :***

- Istituto Nacional de Tecnica Aeronautica, Madrid, 1949.
- Naval Ordnance Laboratory, Washington, D.C., 1949.
- Scuola Normale Superiore, Pisa, 1958.
- Centro Internazionale Matematico Estivo, Villa Monastero, Varenna, 1957, 1964.

d) ***Séries de 1 à 5 leçons :***

- Ecole polytechnique, Varsovie 1926.
- Université de Prague, 1926, 1931.
- Technische Hochschule, Aachen, 1929.
- Université Libre de Bruxelles, 1931, 1937.
- Institut für Strömungsforschung, Göttingen, 1935.
- Kaiser - Wilhem Institut, Berlin, Dahlem, 1936.
- California Institute of Technology, Pasadena, 1938, 1946.
- Faculté Polytechnique de Mons, 1946.
- Brown University, Providence, R.I., 1946, 1951, 1958.
- University of Michigan, Ann Arbor, 1947.
- Yale University, New-Haven, 1947, 1955, 1958.
- Cornell University, Ithaca, 1947, 1953.
- Harvard University, Cambridge Mass, 1946, 1947, 1949, 1951, 1953, 1955, 1957, 1958, 1959, 1960, 1962, 1963, 1965.
- Columbia University, New-York, 1947.
- Université de Gand 1948.
- Illinois University, Urbana, 1950.
- Chicago University, 1950.
- Weather Bureau, Washington, D.C, 1950.
- Faculté Technique de l'Université d'Istanbul, 1952.
- Johns Hopkins University, A.P.L. Silver Spring, 1951, 1953, 1955.
- Johns Hopkins University, Baltimore, 1950, 1951, 1955, 1957.
- Institute for advanced Study, Princeton, 1953.
- Massachussetts Institute of Technology, 1953, 1955, 1958.
- Universita di Bologna, 1956.
- Universita di Milano, 1956.

- Université de Bergen, 1956.
- Université d'Oslo, 1956.
- Freie Universität, Berlin, Dahlem, 1957.
- David Taylor Model Basin, Washington D.C, 1958, 1959, 1960, 1962, 1963.
- Hebrew University, Jerusalem, 1960.
- Université de Téhéran, 1960.
- University of New-Delhi, 1960.
- Punjab University, Chandigarh, 1961.
- Hindu University, Bénarès, 1961.
- Indian Institute of Science, Bangalore, 1961.
- Madras Institute of Technology, 1961.
- Indian Statistical Institute, Calcutta, 1961.
- Tokyo University, 1961.
- Aeronautical Institute, Tokyo, 1961.
- Kyoto University, 1961.
- National Bureau of Standards, Boulder, Colorado, 1962.
- Catholic University of America, Washington D.C, 1962.
- University of Minnesota, Minneapolis, 1964.
- George Washington University, Washington D.C, 1964.
- Aeronautical Research Center, Wright-Patterson base, Dayton, 1965.
- New-York University, Courant Institute, New-York, 1965.

IX – Communications présentées :

a) ***Au Congrès International des Mathématiciens :***

- Bologne, 1928.
- Zurich, 1932.
- Cambridge, Mass, 1950.
- Amsterdam, 1954.
- Edimbourg, 1958.
- Stockholm, 1962.

b) ***Au Congrès International des Mécanique Théorique et Appliquée :***

- Zurich, 1926.
- Stockholm, 1930.
- Cambridge, 1934.
- Cambridge, Mass, 1938.

- Paris, 1946.
- Londres, 1948 (Conférence générale par invitation).
- Istanbul, 1952.
- Bruxelles, 1956.
- Stresa, 1960.
- Münich, 1964.

c) ***Au Congrès International de Philosophie des Sciences :***

- Paris, 1949.

d) ***Au Congrès des Mathématiciens d'expression française :***

- Florence, 1961.

e) ***Aux Colloques Internationaux du C.N.R.S. :***

- Nancy, 1947.
- Lyon, 1948.
- Paris, 1949.
- Poitiers, 1950.
- Alger, 1951.
- Marseille, 1961.

f) ***Aux Colloques Internationaux de l'I.U.G.G. – I.U.T.A.M. :***

- Cambridge, 1953.
- Los Angeles, 1954.
- Oxford, 1958.
- Marseille, 1961.

g) ***Aux Colloques Internationaux organisés par :***

- University of California, Berkeley, 1950, 1955.
- American Mathematical Society, New-York, 1960.
- Mathematical Research Center of the U.S. Army, Madison, 1960.
- Massachusetts Institute of Technology, Endicott, 1963.

X – Editeur, comme Président du Comité Scientifique, des *Comptes rendus* des **Journées scientifiques et Techniques de Mécanique des Fluides,** organisées à Lille par la section lilloise de la Société des Ingénieurs Civils à l'occasion de l'inauguration de l'Institut de Mécanique des Fluides (5 – 7 avril 1934) : E. Chiron, Paris, tome I : XLVIII + 397 pages, tome II : 367 pages.

Références

[1] **Sur les polynômes ultrasphériques.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 157, 1913, p. 912.

[2] **Sur le développement d'une fonction en série de polynômes ultrasphériques.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 157, 1913, p. 1392.

[3] **Sur la convergence des séries procédant suivant les polynômes d'Hermite ou les polynômes analogues plus généraux.** En collaboration avec Paul Appell. *C.R. Acad. Sc.,* t. 158, 1914, p. 381.

[4] **Sur les fonctions hypersphériques.** *Thèse*, Paris, n° 1564, 24 avril 1915, 111 pages.

[5] **Sur la généralisation des séries de Lagrange et de Laplace.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 160, 1915, p. 591.

[6] **Expression de la fonction $\xi_n(\tau)$ par une fonction hypergéométrique.** Note adressée à la Commission de Balistique de l'Académie des Sciences, 1916.

[7] **Sur une équation intégrale de deuxième espèce admettant les fonctions hypersphériques comme solutions fondamentales.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 162, 1916, p. 747.

[8] **Perturbations des trajectoires des projectiles, calcul des cœfficients différentiels.** Note adressée à la Commission de Balistique de l'Académie des Sciences, 1916.

[9] **Sur la formation d'équations intégrales admettant les fonctions hypersphériques comme solutions fondamentales.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 164, 1917, p. 856.

[10] **Sur le mouvement d'un projectile autour de son centre de gravité.** Note insérée dans le *Cours de Balistique* de M. l'Ingénieur d'Artillerie navale Sugot, t. 2, 1918, p. 40.

[11] **Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles vérifiées par les polynômes hypersphériques.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 167, 1918, p. 519.

[12] **Quelques remarques suggérées par un problème d'Hydrodynamique.** Archives de la Commission de Gâvres, 1918.

[13] **Sur le mouvement par tranches parallèles d'un liquide soumis à une force uniforme variable avec le temps.** Archives de la Commission de Gâvres, 1918.

[14] **Mesure de la vitesse des projectiles par enregistrement photographique et photographie posée des projectiles.** En collaboration avec Gabriel Foëx. (Dossier F2a, n° 105, autographié de 300 pages environ. Archives de la Commission de Gâvres, 1918–1919).

[15] **Sur une application des dérivées généralisées à la formation et à l'intégration de certaines équations différentielles linéaires.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 170, 1920, p. 569.

[16] **Sur l'emploi des dérivées généralisées pour la formation et l'intégration de certaines équations différentielles linéaires.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 170, 1920, p. 1045.

[17] **Sur les fonctions hypersphériques et sur l'expression de la fonction hypergéométrique par une dérivée généralisée.** *Acta Mathematica,* t. 43, 1921, p. 197–207.

[18] **Le calcul vectoriel et ses applications à la géométrie analytique, à la théorie élémentaire des courbes et des surfaces, aux systèmes de vecteurs.** En collaboration avec Albert CHÂTELET. Janny, Lille, 1921, un volume autographié de 192 pages.

[19] **Sur les fonctions hypercylindriques.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 172, 1921, p. 1464.

[20] **Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques les plus générales.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 172, 1921, p. 1634.

[21] **Sur certains systèmes associés d'équations aux différences finies et d'équations aux dérivées partielles.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 173, 1921, p. 285.

[22] **Les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur à deux variables.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 173, 1921, p. 401.

[23] **Quelques propriétés des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur à deux variables.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 173, 1921, p. 489.

[24] **Sur l'intégrale générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 173, 1921, p. 900.

[25] **Sur une formule d'addition des polynômes d'Hermite.** *Det Kgl.Denske Vindenskabernes Selskab, Mathematisk fysiske Meddelelser,* t. 5, 1923, p. 1 à 9.

[26] **Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 177, 1923, p. 546.

[27] **Sur une classe particulière de fonctions hypergéométriques d'une variable.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 178, 1924, p. 1949.

[28] **Le calcul vectoriel. – Théorie, applications à la géométrie et à la cinématique.** En collaboration avec Albert CHÂTELET. Gauthier-Villars, Paris, 1924, un volume in-16 de 425 pages.

[29] **La mesure de la vitesse des projectiles par enregistrement photographique sur plaque mobile.** *Mémorial de l'Artillerie française, t. 4, 1925, p. 289–303.*

[30] **Sur une propriété générale des fonctions hypergéométriques d'une variable.** *Comptes rendus du Congrès des Sociétés Savantes,* Paris, 1925, p. 88–95.

[31] **Sur les fonctions définies par des séries dont les cœfficients sont des fonctions rationnelles de l'indice.** *Comptes rendus du Congrès de l'Association française pour l'Avancement des Sciences,* Grenoble, 1925, p. 64–66.

[32] **Application de la photographie sur plaque mobile à l'étude du mouvement des projectiles et en particulier à la mesure de leur vitesse.** En collaboration avec Gabriel FOËX. *C.R. Acad. Sc.* t. 181, 1925, p. 597.

[33] **Sur l'uniformisation d'une classe de fonctions définies par des séries entières à cœfficients méromorphes.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 182, 1926, p. 113.

[34] **Les fonctions hypergéométriques d'une variable.** Cours professé à l'Université de Cracovie, un volume autographié de 80 pages, Cracovie, 1926.

[35] **L'enregistrement photographique des projectiles sur plaque mobile.** *Comptes rendus du 2e Congrès de Mécanique appliquée,* Zürich, 1926, p. 158–161.

[36] **Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, polynômes d'Hermite.** En collaboration avec Paul APPELL. Gauthier-Villars, Paris, 1926, un volume in-4° de 434 pages.

[37] **Sur le développement du logarithme d'une fonction définie par une série de Taylor.** *Ann. Soc. Sc. Bruxelles,* t. 48, 1928, p. 26.

[38] **Sur des fonctions admettant comme valeurs lacunaires les points d'un segment de droite.** *Comptes rendus du Congrès des Sociétés Savantes,* Lille, 1928.

[39] **Sur l'uniformisation des fonctions hypergéométriques de deux variables.** *Comptes rendus du Congrès international des Mathématiciens,* Bologne, t. 3, 1928, p. 323–327.

[40] **Sur une condition nécessaire pour l'absence de pressions négatives dans un fluide parfait plan en mouvement permanent autour d'un obstacle.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 188, 1929, p. 47.

[41] **Sur la liaison entre l'absence de pressions négatives et le sens de la concavité des lignes de jet dans le mouvement plan d'un fluide incompressible autour d'un obstacle.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 188, 1929, p. 230.

[42] **Les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables et la représentation conforme d'un demi-plan sur un polygone rectiligne.** *Ann. Soc. Sc. Bruxelles,* t. 49, 1929, p. 57–59.

[43] **Sur l'uniformisation des fonctions hypergéométriques de M. Appell par les fonctions modulaires de M. Picard.** *J. Math. Pures et Appl.,* 9e série, t. 8, 1929, p. 381–399.

[44] **Sur quelques cas d'intégration des équations du mouvement plan d'un fluide visqueux incompressible.** *Ann. Soc. Sc. Bruxelles,* t. 50, 1930, p. 77–80.

[45] **Sur quelques cas d'intégration des équations du mouvement plan d'un fluide visqueux incompressible.** *Comptes rendus du 3e Congrès International de Mécanique appliquée,* Stockholm, t. 1, 1931, p. 334–338.

[46] **Sur une classe de mouvements plans d'un fluide visqueux incompressible.** *Ann. Soc. Sc. Bruxelles,* t. 51, 1931, p. 7–11.

[47] **Les rides, les vagues et la houle.** *Revue des Questions scientifiques de Bruxelles,* t. 22, 1932, p. 181–230.

[48] **Recherches sur l'adaptation de la forme des véhicules rapides aux lois de la résistance de l'air.** *Moteurs et Cycles,* Lille, février 1933, p. 34–36.

[49] **Détermination des mouvements plans d'un fluide visqueux incompressible où le tourbillon est constant le long des lignes de courant.** *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker Kongresses,* Zürich, t. 2, 1932, p. 298–300.

[50] **Sur le mouvement permanent d'un liquide visqueux.** *Ann. Soc. Sc. Bruxelles,* t. 53, 1933, p. 123–126.

[51] **L'état actuel du problème de la turbulence.** *La Science aérienne,* t. 3, 1934, p. 9–34 et t. 4, 1935, p. 12–52.

[52] **La turbulence du vent dans les couches inférieures de l'atmosphère.** *Revue des Questions scientifiques de Bruxelles,* t. 27, 1935, p. 18–63.

[53] **Etude expérimentale en soufflerie de l'effet de la turbulence sur divers types d'anémomètres.** *Comptes rendus du Congrès de l'Union Géodésique et Géophysique internationale,* Edimbourg, 1936.

[54] **L'étude des courants aériens par l'enregistrement photographique des nuages.** *Comptes rendus du Congrès de l'Union Géodésique et Géophysique internationale,* Edimbourg, 1936.

[55] **Atmosphärische Strömungen ; Wolkenstudien nach Kinoaufnahmen im Hochgebirge. (Jungfrau und Matterhorn.** *Meteorologische Zeitschrift,* t. 53, 1936, p. 277-280.

[56] **L'aéronautique et l'école.** *La Technique moderne,* t. 28, n° 22, 1936, p. 3–7.

[57] **La turbulence atmosphérique.** *Journées techniques internationales de l'Aéronautique,* Paris, 1936, p. 431–467.

[58] **La fonction hypergéométrique de Gauss.** *Mémorial des Sciences Mathématiques,* fasc. 85, 1937, 86 pages.

[59] **Sur les équations de la diffusion thermique par turbulence.** *Ann. Soc. Sc. Bruxelles,* t. 57, 1937, p. 67–72.

[60] **Les bases d'une mécanique de la turbulence.** *Sciences,* n° 16, novembre 1937, p. 372–382.

[61] **Ce que la mathématique doit à Descartes.** *Revue d'Histoire de la Philosophie,* t. 18, 1937, p. 161–171.

[62] **Sur la répartition entre le mouvement moyen et le mouvement d'agitation de l'énergie dépensée dans l'écoulement turbulent d'un fluide incompressible.** En collaboration avec A. Martinot-Lagarde. *C.R. Acad. Sc.,* t. 205, 1937, p. 1208.

[63] **La turbulence atmosphérique.** *Actes de la Société Helvétique des Sciences naturelles,* Genève, 1937, p. 25–41.

[64] **L'anémomètre I.M.F.L.** Un fascicule lithographié, Lille, 1938, 13 pages.

[65] **Sur un appareil permettant de déterminer le module et la direction de la vitesse dans un fluide.** En collaboration avec A. Martinot-Lagarde et G. Rollin. *C.R. Acad. Sc.,* t. 207, 1938, p. 772.

[66] **Recherches sur la turbulence atmosphérique au centre national de vol sans moteur de la Banne d'Ordanche.** *International Studienkommission für den motorlosen Flug-Istus,* Mitteilungsblatt n° 6, 1938, p. 9–13.

[67] **Sonde de pression statique.** En collaboration avec G. Rollin. *G.R.A. Note technique n° 1,* 1939, 12 pages.

[68] **Influence du souffle d'une hélice sur les caractéristiques aérodynamiques d'une maquette motorisée.** En collaboration avec A. FAUQUET. *G.R.A. Note technique n°* 2, 1939, 58 pages.

[69] **Sur le spectre de la turbulence homogène.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 208, 1939, p. 722.

[70] **Some researches on turbulence.** *Proceedings of the Fifth International Congress of Applied Mechanics,* 1938, Cambridge, Massachusetts, p. 352–355.

[71] **Les fonctions aléatoires stationnaires et la théorie statistique de la turbulence homogène.** *Ann. Soc. Sc. Bruxelles,* t. 59, 1939, p. 145–194.

[72] **Influence du souffle d'une hélice sur les caractéristiques aérodynamiques d'une maquette motorisée** (II). En collaboration avec A. FAUQUET. *G.R.A. Note technique n°* 4, 1939, 55 pages.

[73] **Influence du souffle d'une hélice sur les caractéristiques aérodynamiques d'une maquette motorisée** (III). En collaboration avec A. FAUQUET. *G.R.A. Note technique n°* 5, 1939, 40 pages.

[74] **Etude sur l'utilisation des anémomètres dans un courant d'air turbulent.** En collaboration avec A. MARTINOT-LAGARDE et G. ROLLIN. *Publ. Scient. et Techn. Ministère de l'Air,* n° 156, 1939, 1 volume, 52 pages.

[75] **The spectrum of turbulence.** *Journal of the Aeronautical Sciences,* t. 7, 1940, p. 518-520.

[76] **Influence du souffle d'une hélice sur les caractéristiques aérodynamiques d'une maquette motorisée.** En collaboration avec A. MARTINOT-LAGARDE et A. FAUQUET. *G.R.A. Rapport technique n°* 2, 1941, 40 pages.

[77] **Qualification de la turbulence en soufflerie.** *G.R.A. Rapport technique n°* 3, 1941, p. 1–26.

[78] **L'anémoclinomètre I.M.F.L. et son trimanographe.** En collaboration avec A. MARTINOT-LAGARDE et G. ROLLIN. *G.R.A. Rapport technique n°* 4, 1941, 39 pages.

[79] **Sur l'effacement de l'inversion de température après le lever du Soleil dans les couches basses de l'atmosphère.** *La Météorologie,* 3e série, n° 40, 1942, p. 137–149.

[80] **Aérodynamique expérimentale élémentaire. Les expériences. Leur interprétation. Les appareils.** Ministère de l'Education Nationale, Commissariat Général à l'Education générale et aux Sports, Direction des Sports, Section des Sports aériens, un volume, 15 pages, 20 planches, 1943.

[81] **Un problème clé de l'aérodynamique : l'étude de la couche limite.** *Technique et Science Aéronautique,* t. 4, 1943, p. 164–180 ; t. 5, 1943, p. 201–220.

[82] **Hasard et probabilité dans la pensée scientifique contemporaine.** *Annales de la Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de Lille,* 1945, p. 1–22.

[83] **Initiation météorologique aux sports aériens.** Un volume.

[84] **Sur la moyenne des mesures dans un écoulement turbulent des anémomètres dont les indications sont indépendantes de la direction.** *La Météorologie,* 4e série, no 2, 1946, p. 133–143.

[85] **Sur l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible entre deux plaques parallèles indéfinies.** *Congrès de l'Association française pour l'Avancement des Sciences,* Paris, 1945 ; *La Houille Blanche,* Grenoble, t. 3, no 6, p. 509–517.

[86] **La notion de moyenne dans les équations du mouvement turbulent d'un fluide.** 6e *Congrès International de Mécanique appliquée,* Paris, 1946.

[87] **Sur la décroissance de l'énergie cinétique d'un fluide visqueux incompressible occupant un domaine plan borné.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 223, 1946, p. 1096–1098.

[88] **On a property of the laplacian of a function in a two dimensional bounded domain, when the first derivatives of the function vanish at the boundary.** *Mathematics Magazine,* t. 21, 1947–1948, p. 74–79.

[89] **Sur une représentation des fonctions aléatoires.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 225, 1947, p. 37.

[90] **Fonctions aléatoires définies sur un groupe abstrait.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 225, 1947, p. 428.

[91] **Analyse harmonique des fonctions aléatoires strictement stationnaires.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 225, 1947, p. 623.

[92] **Sur la moyenne polyharmonique d'une fonction.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 226, 1948, p. 621.

[93] **Remarques sur les fonctions orthogonales à toute fonction harmonique dans un domaine plan, à propos des équations du mouvement plan d'un fluide visqueux incompressible.** *Ann. Soc. Sc. Bruxelles,* t. 62, 1948, p. 11–18.

[94] **Analyse harmonique des fonctions aléatoires stationnaires d'ordre 2 définies sur un groupe abélien localement compact.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 226, 1948, p. 868.

[95] **Harmonic analysis of the two dimensional flow of an incompressible viscous fluid.** *Quarterly of Applied Mathematics,* t. 6, 1948, p. 1–13.

[96] **Fonctions aléatoires stationnaires et groupes de transformations dans un espace abstrait.** *Colloque International de Calcul des Probabilités et de Statistique mathématique,* Lyon, 1947, C.N.R.S. 1948, p. 67–76.

[97] **Le tenseur spectral de la turbulence homogène non isotrope dans un fluide incompressible.** *VIIth International Congress Applied Mechanics,* London, 1948, General Lecture, p. 6–26.

[98] **Le tenseur spectral de la turbulence homogène non isotrope dans un fluide incompressible.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 227, 1948, p. 760–761.

[99] **Sur la décroissance de l'énergie cinétique d'un fluide visqueux incompressible occupant un domaine borné ayant pour frontière des parois solides fixes.** *Ann. Soc. Sc. Bruxelles,* t. 63, 1949, p. 36–45.

[100] **Turbulencia.** Un volume ; Instituto Nacional Esteban Terradas de Técnica Aeronautica, Madrid, 1949.

[101] **Grandeur et servitude des mathématiques.** *Annales de l'Université de Lille,* 1949, p. 127–135.

[102] **Spectral tensor of a homogeneous turbulence.** *Dedication Symposium. Naval Ordnance Laboratory,* Washington, July 1949 ; *Symposium on Turbulence,* N.O.R.L. 1136, p. 1–31.

[103] **Sur la mécanique statistique des milieux continus.** *Congrès International Philosophie des Sciences,* Paris, octobre 1949, t. 3, 1951 ; *Actualités Scientifiques,* n° 1137, p. 129–144.

[104] **Sur un problème d'algèbre abstraite posé par la définition de la moyenne dans la théorie de la turbulence.** *Ann. Soc. Sc. Bruxelles,* t. 63, 1949, p. 156–172.

[105] **Sur l'analyse spectrale d'une fonction stationnaire en moyenne.** *Actes Colloque International de Mécanique des Fluides,* Poitiers, mai 1950. *Publ. Scient. et Techn. Ministère de l'Air, n° 251, p. 317–335.*

[106] **Statistical mechanics of a continuous medium (vibrating string with fixed ends).** *Proc. 2nd Symposium on Mathematical Statistics and Probability,* Berkeley, August 1950, p. 553–566.

[107] **Sur l'analyse harmonique des fonctions à carré moyen fini.** *International Congress of Mathematicians,* Cambridge, September 1950, t. 1, p. 457–458.

[108] **Autocorrelation function of a truncated function.** *Bulletin American Mathematical Society,* t. 57, 1951, p. 129.

[109] **Averaging processes and Reynolds equations in atmospheric turbulence.** *Journal of Meteorology,* vol. 8, 1951, p. 358–361.

[110] **Atmospheric turbulence.** *Institute for Fluid Dynamics, University of Maryland. Lectures Series,* n° 7, prepared by S.I. PAI, 1951, un volume autographié de 40 pages.

[111] **Mathematical methods used in the statistical theory of turbulence : harmonic analysis.** *Institute for Fluid Dynamics, University of Maryland. Lectures Series,*n° 1, prepared by S.I. PAI, 1951, un volume autographié de 108 pages.

[112] **Introduction to the statistical theory of turbulence : correlation and spectrum.** *Institute for Fluid Dynamics, University of Maryland. Lectures Series,* n° 8, prepared by S.I. PAI, 1951, un volume autographié de 162 pages.

[113] **Spectrum of turbulence and diffusion.** *Institute for Fluid Dynamics, University of Maryland.*

[114] **Theoretical and experimental averages of a turbulent function.** En collaboration avec R. BETCHOV. *Proc. Akad v. Wetenschappen Amsterdam,* t. 54, 1951, p. 389–398.

[115] **La turbulence atmosphérique et les phénomènes d'érosion.** *Colloque sur les Actions éoliennes,* Alger, 27–31 mars 1951, C.N.R.S., 1953, p. 81–102.

[116] **Uniqueness theorem for the heat equation on an infinite rod.** *Bulletin American Mathematical Society,* t. 58, 1952, p. 67.

[117] **Sur une classe de solutions de l'équation de la chaleur.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 234, 1952, p. 2139–2140.

[118] **Generalized harmonic analysis and some boundary values problems.** *Institute for Fluid Dynamics, University of Maryland. Lectures Series,* n° 12, prepared by S.I. PAI, 1952, un volume autographié de 103 pages.

[119] **Sur les ondes de pesanteur à deux dimensions d'énergie finie.** En collaboration avec Jack KOTIK. *C.R. Acad. Sc.,* t. 235, 1952, p. 230–232.

[120] **Surface waves of finite energy.** En collaboration avec Jack KOTIK. *Journal of Rational Mechanics and Analysis,* t. 2, 1953, p. 577–585.

[121] **L'unicité du mouvement d'un fluide visqueux incompressible et l'équation de la chaleur.** *VIIIe Congrès International de Mécanique théorique et appliquée,* Istanbul, août 1952, t. 1, p. 281.

[122] **Fonctions aléatoires et théorie statistique de la turbulence.** Chapitre 14, p. 568–623 de l'Ouvrage : *Théorie des Fonctions aléatoires,* de A. Blanc-Lapierre et R. Fortet, Masson, Paris, 1953.

[123] **Türbülans yüz çehreli ilâhe.** *Türk Yüksek Mühlendisleri Birligi Dergisi,* 75, 76, 1953, p. 10–14.

[124] **Un théorème d'unicité pour les intégrales de l'équation de la chaleur appartenant à la classe** *L*. *C.R. Acad. Sc.,* t. 236, 1953, p. 1527–1529.

[125] **Zur definition des Mittels in der statistischen Theorie der Turbulenz.** *Physikalische Verhandlungen,* t. 3, 1953, p. 37–38.

[126] **Autocorrélation et spectre quadratique d'une fonction définie sur un groupe abélien localement compact.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 236, 1953, p. 2198–2200.

[127] **Fonctions aléatoires harmoniques dans un demi-plan.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 237, 1953, p. 1632–1634.

[128] **L'intégration de l'équation de la chaleur pour des données initiales aléatoires.** Jubilé Scientifique de M. Dimitri Riabouchinsky ; *Publ. Scient. et Techn. Ministère de l'Air,* Paris, 1954, p. 153–169.

[129] **Sur un modèle de turbulence homogène isotrope.** En collaboration avec Garrett Birkhoff. *C.R. Acad. Sc.,* t. 239, 1954, p. 16–18.

[130] **Correlation for truncated samples of a random function.** En collaboration avec François N. Frenkiel. *Proc. Internat. Congress of Mathematicians,* Amsterdam, 1954, t. 2, p. 291–292.

[131] **Transformations de Reynolds opérant dans un ensemble de fonctions mesurables non négatives.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 239, 1954, p. 787–789.

[132] **Construction des transformations de Reynolds régulières.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 239, 1954, p. 934–936.

[133] **Problèmes mathématiques posés par la Mécanique statistique de la turbulence.** *Proc. Internat. Congress of Mathematicians,* Amsterdam, 1954, t. 3, p. 237–242.

[134] **Sous le signe de l'accélération** *Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de Lille,* 9 janvier 1955, p. 1–9.

[135] **Intégrales aléatoires d'équations aux dérivées partielles à cœfficients constants.** Inst. Henri Poincaré, *Séminaire de Calcul des Probabilités,* 7 janvier 1955, p. 1–22.

[136] **Intégrales aléatoires de l'équation de la chaleur dans une barre infinie.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 240, 1955, p. 710–712.

[137] **Fonctions harmoniques aléatoires dans le cercle unité.** *80^e^ Congrès des Sociétés Savantes,* Lille, juin 1955, p. 411-415.

[138] **Introduction to the Statistical Theory of Turbulence.** *J. Soc. Indust. Appl. Math.,* t. 2, 1954, p. 1–9, 143–174, 244–271 ; t. 3, 1955, p. 90–117.

[139] **Random solutions of partial differential equations.** *Proc. 3rd Symposium on Mathematical Statistics and Probability,* Berkeley, t. 3, 1955, p. 199–208.

[140] **La technique frappe à notre porte.** *Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de Lille,* 8 janvier 1956, p. 1–9.

[141] **Représentation d'un champ vectoriel aléatoire ayant une matrice de covariance donnée.** Inst. Henri Poincaré, *Séminaire de Calcul des Probabilités,* 20 janvier 1956, p. 1–23.

[142] **La notion de moyenne dans la théorie de la turbulence.** *Rendiconti Seminario Matematico Fisico di Milano,* t. 27, 1955–1956, p. 1–43.

[143] **Champs de vitesse aléatoires.** En collaboration avec Garrett Birkhoff. *Actes IX^e^ Congrès International de Mécanique appliquée,* Bruxelles, 1956, t. 3, 1957, p. 457–458.

[144] **Intégrales aléatoires de l'équation de la diffusion.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 243, 1956, p. 929–932.

[145] **Un problème de probabilité conditionnelle pour les fonctionnelles linéaires sur un espace de Banach.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 244, 1957, p. 24–27.

[146] **Construction de mesures dans certains espaces fonctionnels en vue des applications à la Physique mathématique.** *Séminaire sur les problèmes mathématiques de la physique théorique,* Lille, 10 janvier 1957, p. 1–22.

[147] **Une classe de mesures de probabilité sur les espaces l^p et $L^p(p \geq 1)$.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 244, 1957, p. 1119–1122.

[148] **Mesures de probabilité sur un espace de Hilbert séparable.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 244, 1957, p. 1850–1853.

[149] **Mesures de probabilité sur les espaces de Banach admettant une base dénombrable.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 244, 1957, p. 2450–2454.

[150] **Fonctions de la Physique mathématique.** Introduction (p. 7–8). Fonction hypergéométrique (p. 9–19). Fonctions hypergéométriques généralisées (p. 21–29). Polynômes d'Hermite (p. 63–70). (Formulaire de Mathématiques, fasc. IX, C.N.R.S., Paris, 1957).

[151] **Mesures de probabilité sur l'espace de Banach $C[0,1]$.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 245, 1957, p. 813–816.

[152] **Statistical mechanics of two-dimensional gravity waves with finite energy.** *David Taylor Model Basin,* Report 1230, avril 1958, 16 pages.

[153] **Kinematics of homogeneous turbulence** (Parts A, B, C). En collaboration avec Garrett BIRKHOFF. *Journal of Math. and Mechanics,* t. 7, 1958, p. 663–704.

[154] **Problèmes mathématiques de la théorie de la turbulence homogène.** (Centro Internazionale di Matematico Estivo, Varenna, 1–10 Settembre 1957 ; *Teoria della Turbolenza,* t. 1, p. 1–104.

[155] **Meccanica Statistica dei Mezzi continui.** *Corso tenuto alla Scuola Normale Superiore,* Pisa, redacto da D[r] FORTE et D[r] BENVENUTI, juin 1958 ; un volume autographié de 80 pages.

[156] **Mesures de probabilité sur l'espace $C[0,1]$.** Inst. Henri Poincaré, *Séminaire de Calcul des Probabilités,* 12 juin 1958, p. 1–18.

[157] **Mesures de probabilité sur l'espace de Banach $C_0[0,1]$.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 247, 1958, p. 3401–3404.

[158] **Intégrales aléatoires d'équations aux dérivées partielles et problème abstrait de Cauchy.** *Internat. Congress of Mathematicians,* Edinburgh, August 1958, section VI.

[159] **Statistical mechanics and theoretical models of diffusion processes.** *Internat. Symposium on atmospheric diffusion and air pollution, Oxford, 1958 ; Advances in Geophysics,* t. 6, 1959, p. 139–147.

[160] **Heat equations and Hermite polynomials.** *Golden Jubilee Commemoration Volume,* Calcutta ; *Mathematical Society,* 1958–1959, p. 193–204.

[161] **Equation de la chaleur et polynômes d'Hermite.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 248, 1959, p. 883–887.

[162] **Mesures de probabilité sur les espaces de Banach possédant une base dénombrable.** *J. Math. Pures et Appl.,* 9[e] série, t. 39, 1960, p. 97–163.

[163] **Estimation de la corrélation d'une fonction aléatoire non stationnaire.** En collaboration avec François N. FRENKIEL. *C.R. Acad. Sc.,* t. 249, 1959, p. 348–351.

[164] **On the statistical mechanics of gravity waves.** *David Taylor Model Basin,* Report 1370, September 1959, 10 pages.

[165] **Statistical fluid mechanics : two-dimensional linear gravity waves.** *Proc. Internat. Conference on Partial Differential Equations,* June 1960, University of Wisconsin Press, Madison, Wisc. 1961, p. 106–136.

[166] **Correlation and spectra for non-stationary random fuctions.** En collaboration avec François N. FRENKIEL. *David Taylor Model Basin,* A.M.L. Report 138, 64 pages.

[167] **Kinematics of homogeneous turbulence** (part D). En collaboration avec Garrett BIRKHOFF. *Journal of Math. and Mechanics,* t. 11, 1962, p. 319–340.

[168] **Statistical mechanics of continuous media.** *Symposium on Hydrodynamics instability ; American Mathematical Society,* New York, April 1960 ; *Proc. Symposia App. Math.,* t. 13, 1962, p. 165–198.

[169] **Correlations and spectra of non-stationary random functions.** En collaboration avec François N. FRENKIEL. *Mathem. of Computations,* t. 10, 1962, p. 1–21.

[170] **Pseudo-intégrales de Stieltjes aléatoires.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 252, 1961, p. 2162–2165.

[171] **Les équations fondamentales de la mécanique des milieux continus.** *Association Prof. de Mathématiques,* n° 214, 1961, p. 255–262.

[172] **Préface à recherches sur l'hydrodynamique de Pierre Duhem.** Nouv. édition *Publ. Scient. et Techn. Ministère de l'Air,* Paris, 1961, p. 1–10.

[173] **Pseudo-intégrales de Stieltjes aléatoires.** (II) *C.R. Acad. Sc.,* t. 252, 1961, p. 3368–3371.

[174] **An elementary theory of the Brownian motion random function.** Lecture given at Indian Statistical Institute, Calcutta, March 1961 ; notes prepared by MM. K.R. PARTHASARATHY, R. RANGA RAO and S.R.S. VARADHAN ; Sankhya. Indian Journal of Statistics, t. 23 (A), 1961, p. 207–220.

[175] **Correlation and spectrum of asymptotically stationary random functions.** Invited Address 26th Conf. Indian Math. Soc., Chandigarh, December 1960 ; *The Mathematics Student,* t. 30, 1962, p. 55–67.

[176] **Remarques sur la démonstration des équations du mouvement d'un milieu continu.** *Miszellaneen der Angewandten Mathematik,* Festschrift Walter Tollmien, Berlin, 1962, p. 99–102.

[177] **Les intégrales aléatoires des équations aux dérivées partielles et la mécanique statistique des milieux continus.** *Atti 2º Reunione Math. expression latine,* Firenze, Bologna, 1961, p. 152–166.

[178] **Cours sur la théorie de l'information.** Centre de Calcul numérique de la Faculté des Sciences de Lille, 1962, rédigé par M^lle^ M. GUISLAIN, un volume autographié de 140 pages.

[179] **Sur une représentation des pseudo-intégrales aléatoires de Stieltjes déduites de la fonction du mouvement brownien.** *Annali di Matematica,* t. 60, 1962, p. 29–36.

[180] **Sur la décomposition d'une fonction aléatoire normale.** *Abstracts of Short Communications, Internat. Congress Mathematicians,* Stockholm, 1962, p. 162.

[181] **Mesures de probabilité sur l'espace de Banach $C_0[0,1]$.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 255, 1962, p. 2334–2337.

[182] **Information's theory and statistical mechanics.** Indian Institute of Science, Bangalore ; manuscript prepared by MM. DEVANATHAN, TIKEKAR and MISRA, Bangalore, March 1963. Un volume autographié de XIII + 194 pages.

[183] **Théorie de l'Information : principe du maximum de l'entropie et ses applications à la théorie de l'estimation et à la Mécanique statistique.** Centre de Calcul numérique de la Faculté des Sciences de Lille, 1963 ; rédigé par MM. G. HECQUET et F. PARSY. Un volume autographié de 157 pages, 1963.

[184] **Random integrals of differential equations.** *Lectures on modern mathematics,* vol. 3, John Wiley, New-York, 1965, p. 277–321.

[185] **La théorie de l'Information et la Mécanique statistique classique des systèmes en équilibre.** *Corso tenuto a Varenna dal 21 al 29 agosto 1964.* Dinamica dei gas rarefacti. CIME. Edizioni Cremonese. Roma 1965, p. 143–210.

[186] **The Gram-Charlier approximation of the normal law and the statistical description of a homogeneous turbulent flow near statistical equilibrium.** *David Taylor Model Basin.* Report 2013. March 1966, 25 pages.

[187] **Sur quelques propriétés de la fonction de Wiener-Levy.** *International Congress of Mathematicians,* Moscou 1966, Abstract Section 11 p. 12.

[188] **Une propriété caractéristique de la fonction aléatoire du mouvement brownien.** En collaboration avec Jean DELPORTE. *C.R. Acad. Sc.,* t. 263, 1966, p. 919–922.

[189] **A lecture course on heat equation and its applications to fluid dynamics.** *Indian Institute of Science* Bangalore ; manuscript prepared by R.K. Bhatnagar and V.G. Tikekar. III + 73 pages, avril 1967.

[190] **Mesures de probabilité sur les espaces de Fréchet à base de Schauder ; application à la fonction du mouvement brownien.** En collaboration avec Jean Delporte. *C.R. Acad. Sc.,* t. 264 Série A, 1967, p. 919–922.

[191] **Information et probabilité.** En collaboration avec Bruno Forte. *C.R. Acad. Sc.,* t. 265 Série A, 1967, p. 110–114.

[192] **Information et probabilité.** En collaboration avec Bruno Forte. *C.R. Acad. Sc.,* t. 265 Série A, 1967, p. 142–146.

[193] **Information et probabilité.** En collaboration avec Bruno Forte. *C.R. Acad. Sc.,* t. 265 Série A, 1967, p. 350–353.

[194] **Mécanique statistique des milieux continus dont les équations du mouvement sont linéaires.** *Abstracts : 12th Int. Cong. Applied Mechanics.* Stanford 1968, p. 57.

[195] **Introduction à la théorie des systèmes évolutifs aléatoires.** I^{re} Partie. *C.R.P. Marseille*, 1968 VI + 116 pages.

[196] **Sur une classe d'informations.** En collaboration avec Pietro Benevenuti. *C.R. Acad. Sc.,* t. 269 Série A, 1969, p. 97–101.

[197] ... Traduction Japonaise de [184]. "Random Integral of Differential equations". Vol. 3 – Iwanami Shoten Tokyo, 1969 p. 409–468.

[198] **Forme générale de l'opération de composition continue d'une information.** En collaboration avec Bruno Forte et Pietro Benevenuti. *C.R. Acad. Sc.,* t. 269 Série A., 1969 p. 529–534.

[199] **The composition law in information theory.** *Reports of Meetings.* 7th Int. Symp. Functional Equations, Waterloo, 1969, p. 16–18.

[200] **Mesures de l'information par un ensemble d'observateurs.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 269 Série A, 1969, p. 1081–1085.

[201] **Introduction à la théorie des systèmes évolutifs aléatoires.** II^{e} Partie 1er fascicule. *C.R.P. Marseille.* 89 pages.

[202] **The composition law in information theory.** *Aequationes mathematicae.* t. 4, 1970, p. 216–218.

[203] **Mesure de l'information fournie par un événement.** *Colloques internationaux C.N.R.S. n^{o} 186.* Clermont-Ferrand 1969. Paris C.N.R.S., 1970 p. 191–221.

[204] **Mesure de l'information par un ensemble d'observateurs.** *C.R. Acad. Sc.,* t. 271 Série A, 1970, p. 1017–1021.

[205] **Measure of information by a set of observers : a functional equation.** *C.I.M.E. Functional equations and inequalities.* La Mendola, 20–28 août 1970, Ed. Cremonese Roma 1971. p. 163–193.

[206] **Idéaux caractéristiques d'une information.** En collaboration avec Pietro BENEVENUTI. *C.R. Acad. Sc.,* t. 272 Série A, 1971, p. 1467–1470.

[207] **Composition law of the mean information.** *Aequationes Mathematicae* t. 6, 1971, p. 101.

[208] **Mesure de l'information par un ensemble d'observateurs indépendants.** *VIth International Conference on Information Theory.* Prague Sept. 1971.

[209] **Remarks on the definition of a probability on a product- space with given marginal probabilities.** *Jour. Math. Phys. Sciences Madras 6, 1972, p. 129–132.*

[210] **Opération de composition régulière et ensemble de valeurs d'une information.** En collaboration avec Pietro BENEVENUTI. *C.R. Acad. Sci.,* t. 274 Série A, 1972, p. 655–659.

[211] **Sur une loi de probabilité du champ des vitesses d'un fluide dans un état voisin de l'équilibre statistique.** *Atti del Convegno sulla teoria della turbolenza.* Roma Aprile 1971. Symposia Mathematica. *Academic Press.* vol. IX, 1972, p. 273–298, London, New-York.

[212] **Grandeur et servitude de la science.** *Séance solennelle de la Société Industrielle du Nord.* 16 janvier 1972. Le Monde Industriel n° 700 Février 1972 p. 9–23.

[213] **Measure of information by a set of independent observers.** *Aequationes Mathematicae* t. 8, 1972, p. 159–161.

[214] **Note di theoria dell'informazione** Redatte da G. Maschio, Istituto di Matematica Applicata. Roma, 1972, 123 p.

[215] **Introduction à la théorie des systèmes évolutifs aléatoires.** II^{e} Partie, 2^{e} fascicule. *C.R.P. Marseille,* 1972.

[216] **Mesure de l'information fournie par un événement.** Séminaire sur les questionnaires 24 nov, 8 déc. 1971. *Structures de l'information.* Institut Henri Poincaré Paris 1972, 27 pages.

[217] **Temps d'entrée d'un processus stochastique et mesure de l'information.** En collaboration avec NGUYEN-TRUNG HUNG. *C.R. Acad., Sc.,* t. 275, série A, 1972, p. 721–725.

[218] **An ergodic property of the brownian motion.** *Mathematics Student* t. 11, 1972, p. 35–37.

[219] **Sur une équation fonctionnelle de la théorie de l'information généralisant l'équation de Cauchy.** *Demonstratio Mathematica*, vol. 6, Part. 2, 1973, p. 665–685.

[220] **Mesure de l'information, temps d'entrée et dimension de Hausdorff.** En collaboration avec NGUYEN-TRUNG HUNG. *C.R. Acad., Sc.,* t. 276, série A, 1973, p. 807–811.

[221] **Informations du type Inf, idéaux et filtres.** En collaboration avec P. BENVENUTI. *C.R. Acad., Sc.,* t. 276, série A, 1973, p. 1123–1128.

[222] **Statistically well-set Cauchy problems.** En collaboration avec G. BIRKHOFF et J. BONA. *Probabilistic Methods in applied Mathematics,* editor Bharucha-Reid, vol. 3, Academic Press, New-York, 1973, p. 1–120.

[223] **Definizione generale della misura dell'informazione fornita da un evento.** Seminario interdisciplinaro di Venezia, 28 mai - 1er juin 1973. *Teoria dell'informazione* Soc. ed. Il Mulino. Bologna 1974, p. 29–43.

[224] **La théorie généralisée de l'information et la mesure subjective de l'information.** Théories de l'Information : Marseille Luminy 5–7 juin 1973. *Lectures Notes in Mathematics* n° 398, Springer 1974, p. 1–34.

[225] **Functional equations in the theory of information.** Xe internationale Tagung über Funktionalgleichungen. Oberwolfach. 30 VII – 5 VIII, 1972. *Aequationes Mathematicae,* vol. 10, 1974 p. 294–295.

[226] **Turbulent atmospheric diffusion : the first twenty-five years.** *Proceedings Symposium Charlottesville (Virginia)* April 8–13, 1973. Academic Press New-York 1974 p. 1–23.

[227] **Information sémantique et information de localisation : description d'un univers.** Université des Sciences et Techniques de Lille, *Publications Internes de l'U.E.R. de Mathématiques* n° 22, 19 pages, Lille 1974.

[228] **Une inégalité fonctionnelle de la théorie de l'information généralisée.** XIIe International Symposium on Functional Equations. Waterloo and Victoria Harbor. Aug. 30 – Sept. 9 – 1974. *Aequationes Mathematicae* vol. 12, 1975, p. 269.

[229] **L'indépendance des événements dans la théorie généralisée de l'information.** Journées Lyonnaises des questionnaires. 12–13 juin 1975 C.N.R.S. Groupe de Recherches 22, Paris 1976, p. 1 à 30.

[230] **Determination of a compositive information on a product space as a function of marginal compositive information : a functional equation.** *Tagungsbericht : XIII^e International Symposium on Functional equations Oberwolfach* 6–12 juil. 1975, p. 26–27. Aequationes Mathematicae, vol. 14, 1976 p. 218–219.

[231] **Independent events : a functional equation.** XIV^e International Symposium on functional equations. Lecce 21–26 May 1976. *Aequationes Mathematicae* vol. 15, 1977, p. 272–273.

[232] **Indépendance des événements en calcul des probabilités et en théorie de l'information.** Journées de la Soc. Math. de France, Bonas, 20–23 sept. 1976. C.N.R.S. Groupe de Recherches 22, Paris 1977, p. 1 à 9.

[233] **Les deux points de vue de la théorie de l'information : information a priori, information a posteriori.** Colloque International C.N.R.S. n° 276, Cachan 4–8 Juil. 1977, Paris 1978, p. 77–88.

[234] **Independent events.** 1^st World Conference on the Mathematics at the service of Man. Barcelona, 10–16 July 1977.

[235] **A functional equation in information theory.** XVI^e Internationales Symposium über Funktionalgleichungen, septembre 1978, Retzhof (Osterreich). *Aequationes Mathematicae,* vol. 19, 1979, p. 261–262.

[236] **Une interprétation des mesures de plausibilité et de crédibilité au sens de G.** SHAFER **et de la fonction d'appartenance définissant un ensemble flou de L.** ZADEH. *Publications IRMA de Lille I,* 1980, t. 2, fasc. 6, p. II-01 à II-20.

[237] **Mesures d'information, plausibilité, crédibilité, possibilité et ensembles flous.** *Publications de l'Université de Lyon,* 1981.

[238] **Interpretation of membership function of fuzzy sets in terms of plausibility and belief.** 1981. in *Fuzzy information and decision processes* M.M. GUPTA and E. SANCHEZ eds. North-Holland publishing company, 1982, p. 93–98.